昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2015年2月1日発行　第53巻2号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

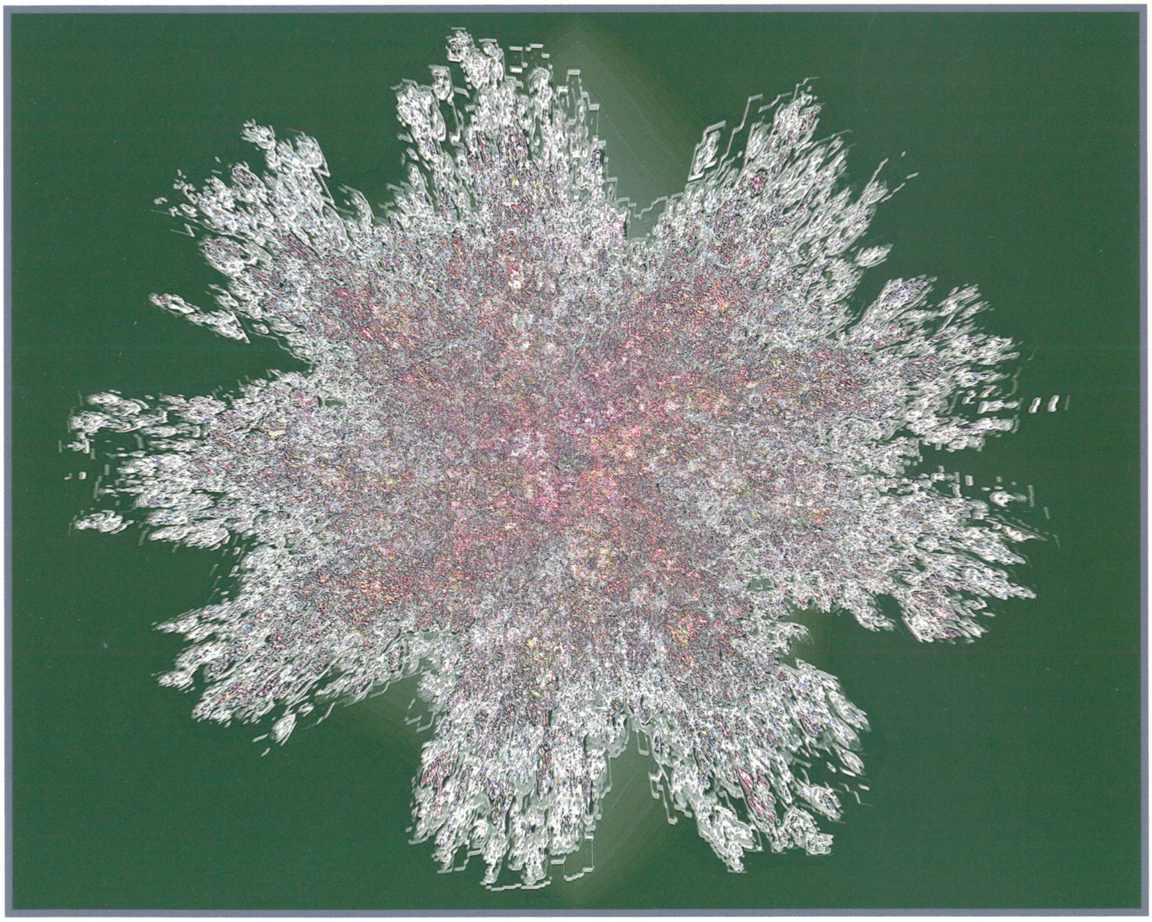
数理科学

2
2015

特集

物理学諸分野の拡がりとつながり

現代物理の全体像を素描する



No.620
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 620 February 2015

物理学諸分野の拡がりとつながり

現代物理の全体像を素描する

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2011年/12 省略

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12 〈振動する〉物理

2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念
/7 モノポールの謎
/8 ベクトル解析の力
/9 重力の謎と魅力
/10 複素解析の視点
/11 応用するトポロジー
/12 場と力の物理イメージ

2015年/1 科学における〈時間〉

数理科学臨時別冊一覧

14年/6 格子模型の数理物理
14年/7 数物系のためのミラー対称性入門
14年/8 情報幾何学の新展開
14年/9 作用素環と無限量子系
14年/10 重力とエントロピー
14年/11 数学的な感覚の探求
14年/12 4次元微分幾何学への招待
15年/1 ゲージ理論の基礎数理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN＆ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN＆ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

February 2015 MATHEMATICAL SCIENCES Number 620

特集／物理学諸分野の拡がりとつながり

物理学は一つ

藤川 和男

本特集からもわかるように現代物理学は非常に多様な分野にわたっている．ニュートンに始まる古典的な力学は，それ自身としての応用のみならず古典統計力学および解析力学の基礎として，現在も多くの問題の解決に用いられている．またマクスウェルに始まる古典電磁気学は，電気とか電磁波に関係した応用において現代生活に不可欠になっている．これらのいわゆる古典物理学だけでも，その全容を短時間に（というのは，例えば，大学の4年間で）理解するのは容易ではないと言える．

他方，20世紀前半には，相対性理論と量子力学さらにはそれらの融合と発展として場の量子論が定式化された．これらの発展は，例えば，特殊相対論は，古典電磁気学のマクスウェル方程式に含まれる対称性の考察の結果として，ローレンツ変換とそれに基づく空間と時間を統合した4次元ミンコウスキー空間という革命的な時空の概念に導いた．一般相対論は，ミンコウスキー空間の考え方とニュートンの重力理論およびリーマン幾何の融合とみなされる．これらの発展には，数学における対称性の記述として発展した変換群の考え方が密接に関係している．

一方量子力学は，古典論から概念的に非常にかけ離れており，いまだに量子力学が本当にわかったと言える人がいないのではないかと思われるような状況である．数学的には，古典解析力学の位相空間（phase space）におけるポアソン括弧の定式化が，なぜか量子力学に非常に近い．解析力学における古典的な量を無限次元の行列に置き換えると，大ざっぱに言って量子力学が得られる．またファインマンによる量子力学の経路積分による定式化では，古典的な作用を位相因子（phase factor）として「積分」することにより量子力学が再現されることになる．

特殊相対論と量子力学の融合である場の量子論は，粒子の生成と消滅を記述でき，これらの現象を扱う素粒子物理学の理論的な基礎を与えている．特に素粒子の標準模型と呼ばれる理論は，これらの知識の集大成であり，4次元ミンコウスキー空間の基本的な対称性である通常のローレンツ変換に加えて，離散的なパリティと時間反転に関する不変性（およびその破れ）を見事に記述している．時空の性質であるパリティと時間反転に粒子反粒子変換が加わる（CPT定理）のは，例えば，ファインマンの見方をすれば，反粒子は時間軸の負の方向へ運動する粒子という解釈が可能であり，このことの反映である．電磁場の一般化としてヤン・ミルズ場が基本的であり，超伝導のBCS理論に始まる対称性の破れ（南部・ゴールドストーンの定理）に伴うヒッグス機構が重要である．ヒッグス粒子がCERNで発見されたことは記憶に新しい．

さらに最近は，宇宙論および宇宙物理学が精密科学として成長してきた．宇宙の歴史を記述する

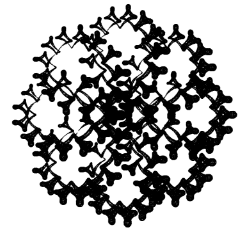
学問が精密な科学になるということ自体が驚きであるが，最近の測定技術の進歩によりビッグバン理論に基づく宇宙のはじまりが理論的考察と実験の対象になってきた．もし宇宙の初期が現在の理論的な枠組みで記述されるのなら，超弦理論のような枠組みの役割は何か，という興味ある質問が自然に起こる．もし超弦理論が宇宙の初期状態を記述すると予想される量子重力理論に必須であれば，初期宇宙の標準理論と呼ばれる枠組みに何か本質的な予言とか制約を課すのではないかと期待される．もし超弦理論の助けを借りずに，初期宇宙の大枠の記述が既存の枠組みで可能なら，超弦理論のようなさらに先を見据えた理論の存在理由が問われることになるかもしれない．あるいは，現在の測定手段で測定できる範囲では，素粒子論であれ宇宙論であれ，既存の場の量子論と古典的な一般相対論で十分であるという常識的な結論になるのかもしれない．

既存の理論的な枠組みを超えていく試みとは別に，現在の測定手段で測定できる量子力学と関連した物理現象においても多くの発展が見られており，これらが今後の実験科学としての物理学で中心的な役割を果たすかもしれない．例えば，物性物理学では，平面図形で言えば3角形と4角形を区別しないような考え方（トポロジーという用語で表される考え）が基本的な役割を果たしている現象および新しい物質が多くの研究者の興味を引いている．量子統計力学においても熱平衡系の扱いで興味のある提案がなされている．量子力学そのものにしても，最近は情報理論との関連で多くの研究がおこなわれており，まだ決定的な成果というものは得られていないが，量子光学の発展と相俟って将来暗号理論のような分野に大きな貢献が期待されている．他方，高速計算機の目ざましい進歩に伴い，物理学の広い分野，とりわけ物性理論，素粒子・原子核理論とか一般相対論等で数値シミュレーションという手法が盛んになってきている．

本特集の記事を読まれる読者は物理学の歴史的な発展から最近の話題まで，広い範囲の物理学の展望を楽しまれるものと期待している．今回の特集からもわかるように物理学は素晴らしい発展を見せたが，同時に研究分野が非常に専門化し細分化された状況にある．これらの記事を読まれた若い人たちに望むことは，現在の物理学の研究領域にとらわれない，より大きな視野で物理学の全体を見渡すような研究を将来創始してほしいということである．標語的に言えば「物理学は一つ」である．

（ふじかわ・かずお，東京大学名誉教授，理化学研究所）

力学・解析力学



原田 恒司

1. 力学から解析力学へ

ふだんはあまり意識していないかも知れないが，力学には「枠組み」の部分と「中身」の部分がある．「枠組み」というのは，力の正体がなんであるかにかかわらずに成立することがらであり，「中身」というのはまさしくその力の正体であり，その力によって引き起こされる運動である．力については全く何も言わないで成り立つことがらを**運動学**というが，これは「枠組み」の最たるもので，「力学以前」と言ってもいい．力学の最も重要な法則である**ニュートンの運動の 3 法則**は，力には言及するが，どんな力がはたらいているのかという「中身」には関係なく成立する「枠組み」である．たとえば質量 m の質点（位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t)$）に対する運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{1}$$

は，力 $\boldsymbol{F}$ がどんなものであろうと成立する．また，作用・反作用の法則も力の性質にはよらない．

一方，具体的な力の種類やそれらによる運動が「中身」である．たとえばばねに結びつけられた質点にはフックの法則から伸び/縮みに比例する力がはたらくとか，2 つの質点の間には質点間の距離の 2 乗に反比例し，それぞれの質量に比例する万有引力がはたらき，それによってケプラーの法則が導かれるといったことである．ふつう力学ではそもそもどのような力があり得るのかということはあまり問題にならない．マクロな系にはたらく力は，たとえばばねの力や摩擦力のような，現象論的なものが多いからだろう．一方，素粒子物理学では基本的な力にはどんなものがあるのかというのが中心的なテーマになる．

対称性や**保存則**というのは力の性質に依存するがやはり「枠組み」と考えるべきだろう．たとえば中心力のみがはたらく場合，つまり力に特別な方向がなく等方的な場合には角運動量が保存することが導かれる．中心力という力の性質の帰結ではあるが，中心力であれば万有引力なのかばねの力なのかに依らない．

解析力学というのは，力学の「枠組み」の部分を抽象化・一般化したものである[1]．**ラグランジュ形式の力学**では，物理系は一つのスカラー関数（ラグランジアン）$L(q,\dot{q},t)$ によって記述される．ここで q は系を記述するのに必要な（一般化）座標 $q_i(t)$ $(i=1,\ldots,N)$ を，$\dot{q}$ はその時間微分を表す（N は自由度の数と呼ばれ，系を記述するのに必要な（最小限の）独立な座標の数である）．解析力学の様々な結果はこのラグランジアンが与えられたとしたときのものである．たとえば，運動方程式はどのような系に対しても

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{2}$$

で与えられる（添字 i は 1 から N までの値を取るとする．以下同様）．

特に興味深いのはこの方程式（**オイラー–ラグ**

ランジュ方程式）がどのような座標のとり方をしても同じ形をしているということである．つまり，系を記述する座標として $q_i(t)$ でなく，その関数である $Q_i(t) = Q_i(q(t), t)$ を用いても，運動方程式は同じ形

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \tag{3}$$

である．この事実は，オイラー–ラグランジュ方程式というのが**作用** $S = \int_{t_a}^{t_b} dt\, L$ を停留にする経路 $q_i(t)$ が満足する方程式であることと関係している．そのような経路は幾何学的に決まり，座標のとり方によらない．

系の対称性はラグランジアンの対称性として現れる．たとえば物理系が回転対称（等方的）であるということはラグランジアンが回転の座標変換の下で不変であるという性質に反映される．ラグランジアンがこの性質を持つとき角運動量が保存することが示される．「中身」である力の性質は，ポテンシャルエネルギーを通してラグランジアンの性質として表現される．

考えている物理系に対してラグランジアンが与えられれば，一般的な解析力学の手法が適用できる．それではラグランジアンはどう決まるのかというと，同語反復的だがオイラー–ラグランジュ方程式がニュートンの運動方程式となるように，というのが一般的な答えだ．たとえば運動方程式 (1) を与えるラグランジアンは，力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるとして $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ と書けるとすると，

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 - V(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

で与えられる．多くの場合，ラグランジアンはこのように (運動エネルギー) − (ポテンシャルエネルギー) の形をしている[*1]．

理論に高い対称性を要求すると，可能なラグランジアンの形が制限されて実質的にラグランジアンが決まってしまうことがある．いわば対称性がダイナミクスを決めてしまうのだ．後述する電磁気学や，**一般相対性理論**はこの良い例である．

解析力学のもう一つの形式である**ハミルトン形式の力学**では，(一般化) 座標 q_i と，それに**共役**[*2]な（一般化）運動量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{5}$$

が重要な役割を果たす．これらをまとめて**正準変数**とも言う．系を記述するスカラー関数

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L \tag{6}$$

を**ハミルトニアン**という．ラグランジアンからハミルトニアンへはちょうど熱力学で内部エネルギーからヘルムホルツの自由エネルギーを定義するときのようなルジャンドル変換になっている．右辺の $\dot{q}$ には式 (5) を用いて q と p で表されたものを代入し，q と p とですべて表されているとする．**ハミルトンの運動方程式**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{7}$$

はオイラー–ラグランジュの運動方程式，つまりニュートンの運動方程式と同等であることを示すことができる．

ハミルトニアンはふつう系のエネルギーである．たとえばラグランジアン (4) に対してハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}|^2 + V(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

となる．この例で，ハミルトンの運動方程式 (7) がニュートンの運動方程式と同じになることは簡単にチェックできるだろう．

ハミルトン形式の力学は，**ポアッソン括弧**を用いるとすっきりと記述することができる．q と p の関数である A と B に対して，ポアッソン括弧 $\{A, B\}$ は

*1) 保存力でない力をラグランジアンに含めて扱う一般的な方法は知らない（別扱いは常に可能）．よく知られている例は減衰項を含む振動子で，ラグランジアンは $L = \frac{1}{2}me^{2\gamma t}\left[\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right]$ で与えられる．これを (運動エネルギー) − (ポテンシャルエネルギー) と見るのは無理があるだろう．

*2) 「きょうやく」と読む．正しくは共軛だろう．英語 conjugate は語源的には動詞 conjugare < con- “togather” + jugare “join” の完了分詞からきていて，その元は名詞 jugum 軛（くびき）である．

$$\{A,B\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \quad (9)$$

と定義される．特に

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (10)$$

となることに注意しよう．これは正準変数の「組」を指定する関係式ととらえることができる．

ポアッソン括弧を用いるとハミルトンの運動方程式は

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (11)$$

と書ける．あるいはもっと一般に，任意の（t に陽に依存しない）q と p の関数 $A(q,p)$ に対して

$$\dot{A} = \{A, H\} \quad (12)$$

と表すことができる．

ハミルトン形式の最も重要な点は，座標と運動量を混ぜるような非常に広い変数変換のクラスの下で運動方程式 (7) が不変になるということである．このような変換を**正準変換**と呼ぶ．正準変換はポアッソン括弧を不変にするような変換であると特徴づけることができる．つまりポアッソン括弧 (9) を定義するのに q と p とから定義される新しい座標 $Q(q,p)$ と運動量 $P(q,p)$ を用いても同じ結果になるような変換 $(q,p) \to (Q,P)$ が正準変換である．

正準変換を考えることによって得られる最も興味深い点は，系の時間発展もまた一種の正準変換であるという観点であろう．このような変換を生成する関数 S が満足する微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (13)$$

が**ハミルトン–ヤーコビの方程式**である．この微分方程式の，付加定数 C を除き N 個の積分定数 α_i $(i=1,\ldots,N)$ を含む解 $S_J(q,\alpha,t)$ を**完全解**と呼ぶ．完全解が（一つ）求まると実は運動が決まってしまう．定数 α は運動方程式 (7) の運動量の初期値に対応する．座標の初期値に対応する定数は $\beta_i = \partial S_J/\partial \alpha_i$ によって与えられる．この式を q について解くと $2N$ 個の任意定数 α と β を含む表式が得られるはずである．これは一般解に他ならない．

2. 解析力学から電磁気学へ

解析力学は，「枠組み」を提供することでふつう力学では考えないような系に対しても解析力学的な一般的な取扱いを可能にする．電磁気学は力学とは本来異なる文脈で発展してきた学問であるが，電磁場に対するラグランジアンが与えられれば，一つの力学系として扱うことができる．

電磁気学の解析力学的記述にはスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x},t)$，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ を導入することが本質的である．これらは「座標」の役割を果たす．特殊相対性理論ではこれらは4元ポテンシャル $A^\mu(\boldsymbol{x},t)$ $(\mu=0,1,2,3)$ とまとめられる（$A^0=\phi$, $A^1=A_x$, $A^2=A_y$, $A^3=A_z$）．つまり，空間の各点 $\boldsymbol{x}$ に4つの「座標」があって，それらを用いて電磁場を記述するのである．空間の位置を表す $\boldsymbol{x}$ は（ローレンツの添字 μ とともに）「添字」の役割（$q_i(t)$ における i）を果たす．

電磁場のラグランジアンは**ローレンツ不変性**と，**ゲージ対称性**という特別な対称性によって決まる．ローレンツ不変性は，4元ベクトルの添字について縮約されていてラグランジアンがローレンツスカラーであるという要請であり，ゲージ対称性はゲージ変換

$$A_\mu(\boldsymbol{x},t) \to A_\mu(\boldsymbol{x},t) + \partial_\mu \chi(\boldsymbol{x},t) \quad (14)$$

の下での不変性である．ここで $\partial_0 = \partial/\partial(ct)$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$ を表し，$\chi(\boldsymbol{x},t)$ は任意の関数である．ラグランジアン L はラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の積分で与えられ（$L = \int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{L}$）*3)，これらの対称性を持ち，微分を2つまで含むという条件を満たすラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \quad (15)$$

*3) 相対論的不変性を意識するなら，ラグランジアンよりもむしろ作用 $S = \int dt\,L = \int d^4x\,\mathcal{L}$ を考えたほうが良い．

と決まってしまう．ただし $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ は電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を表すローレンツテンソルであり，j^μ は電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ とからなる 4 元電流密度である．

力学系としての電磁場の特殊性は，無限自由度系だということばかりではなく，いわゆる**特異系**でもある点にある[2]．これはゲージ対称性と密接に関係している．この系をハミルトン形式で取り扱おうとすると，A^0 に共役な運動量が定義できないことに気づく．実際，ラグランジアンには $\dot{A}^0$ の項は含まれていないので，A^0 はふつうの力学変数ではない．また，ベクトルポテンシャルの時間変化がゲージ変換として書かれる場合には，物理系は実際は時間発展していない．つまり，系の時間発展の（ポテンシャルによる）記述には冗長性がある．物理的には，電磁場の力学的自由度は電磁波の横波 2 成分であるが，それをローレンツ不変に記述するためには 4 成分のベクトルポテンシャルが必要だということである．

非可換ゲージ理論や一般相対性理論に対しても，事情は電磁場の場合とよく似ている．

3. 解析力学から量子力学へ

量子力学の基本方程式である**シュレーディンガー方程式**には，対象となる力学系のハミルトニアンが現れ，ハミルトン形式の力学と密接な関係を持つ．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle. \tag{16}$$

ただし $\hat{H}$ はここでは状態空間（複素ヒルベルト空間）に作用する量子力学的線形演算子であり，古典的ハミルトニアン (8) で記述される系に対しては

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}|\hat{\boldsymbol{p}}|^2+V(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{17}$$

となる．つまり，古典的ハミルトニアンに現れる運動量 $\boldsymbol{p}$ を運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}}$ に，座標 $\boldsymbol{r}$ を座標演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ に置き換えたものが量子力学的ハミルトニアンとなる．

一般に，座標 q と運動量 p とで書かれた古典的ハミルトニアン $H(q,p)$ で記述される系の量子論は，座標，運動量を演算子に置き換えることによって得られる*4)．「演算子に置き換える」というのは具体的には交換関係

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_j]=[\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0,\quad [\hat{q}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij} \tag{18}$$

を設定することである．ただし，交換子は $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ と定義される．交換子 (18) とポアッソン括弧 (10) との対応関係は明白だろう．

式 (18) は物理的には不確定性関係を表している．この極めて量子力学的な関係が，古典力学の正準変数の「組」という概念と密接に関係していることは興味深い．

古典力学における正準変換は，量子論ではユニタリ変換に対応する．特に座標と運動量に対して，ユニタリ演算子 $\hat{U}$ による変換 $\hat{q}_i\to\hat{q}'_i=\hat{U}^\dagger\hat{q}_i\hat{U}$, $\hat{p}_i\to\hat{p}'_i=\hat{U}^\dagger\hat{p}_i\hat{U}$ は，交換関係 (18) を不変にすることに注意しよう．

時間発展は正準変換とみなせるので，量子力学ではユニタリ変換で記述される．この演算子を $\hat{U}(t)=e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ と置くと

$$\begin{aligned}\hat{q}_{\mathrm{H}i}(t)&\equiv e^{i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{q}_i\,e^{-i\hat{H}t/\hbar},\\ \hat{p}_{\mathrm{H}i}(t)&\equiv e^{i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{p}_i\,e^{-i\hat{H}t/\hbar}\end{aligned} \tag{19}$$

は微分方程式

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{d}{dt}\hat{q}_{\mathrm{H}i}(t)&=[\hat{q}_{\mathrm{H}i}(t),\hat{H}],\\ i\hbar\frac{d}{dt}\hat{p}_{\mathrm{H}i}(t)&=[\hat{p}_{\mathrm{H}i}(t),\hat{H}]\end{aligned} \tag{20}$$

を満足する．一般に演算子 $\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)\equiv\hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{U}(t)$ は

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_{\mathrm{H}}(t)=[\hat{A}_{\mathrm{H}}(t),\hat{H}] \tag{21}$$

を満足する．これを**ハイゼンベルクの運動方程式**という．式 (11) が式 (20) に，式 (12) が式 (21) に対応しているのは明白だろう．

量子力学のもう一つの定式化である**経路積分**は，ラグランジュ形式の力学との関連が深い．時刻

*4) ただし，量子力学では演算子の順序が問題になるので，このようにして得られる量子論と古典論との対応は単純ではない．また，この対応はデカルト座標以外ではうまくいかないことが多い．

t_I における位置が q_I である状態から時刻 t_F における位置が q_F である状態への遷移振幅 $\langle q_F(t_F)|q_I(t_I)\rangle = \langle q_F|e^{-i\hat{H}(t_F-t_I)/\hbar}|q_I\rangle$ は,

$$\int [Dq] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_I}^{t_F} dt\, L(q,\dot{q})\right] \tag{22}$$

で与えられる．ここで積分は境界条件 $q(t_I)=q_I$, $q(t_F)=q_F$ を満足するようなすべての経路 $q(t)$ についてとられる．$L(q,\dot{q})$ は系のラグランジアンである．

経路積分の被積分「関数」は古典的な，つまり演算子ではない普通の汎関数である．量子論的性格はすべての経路についての「積分」をすることからくる．あらゆる波 ($e^{iS/\hbar}$) の足し上げは量子力学における波動性の表現である．

経路積分の古典的極限において，古典的経路のみが重要なわけではない．古典的経路「近傍」の(無限に多くの) 経路が重要なのである．経路積分は位相 $e^{iS/\hbar}$ の和であるが，古典的経路では作用 S が停留なので，その「近傍」の経路ではほとんど S の値が変わらず，ほぼ同じ位相の和となって大きな寄与を与える．一方，それ以外の経路に対しては，近傍の経路であっても S は大きく変化し，全く異なった位相を与える．それらの和は打ち消し合い，小さな寄与しか与えない．

古典的極限で，時刻 $t=0$ で q_0 にいた粒子が時刻 t で q にいる振幅，つまり波動関数は $\psi(q,t) \sim e^{iS_{\rm cl}(q,q_0,t)/\hbar}$ で近似される．ただし，$S_{\rm cl}(q,q_0,t)$ は古典的経路に対する作用の値である．この波動関数に対して

$$\hat{p}_i\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}\psi \sim \frac{\partial S_{\rm cl}}{\partial q_i}\psi, \tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}^2\psi \sim \left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2 S_{\rm cl}}{\partial q_i^2} + \left(\frac{\partial S_{\rm cl}}{\partial q_i}\right)^2\right]\psi \tag{24}$$

となる．式 (24) の第 1 項は古典的極限で第 2 項に比べて無視できることを用いると，一般に $\hat{p} \to \partial S_{\rm cl}/\partial q$ という置き換えが成り立ち，シュレーディンガー方程式から

$$-\frac{\partial S_{\rm cl}}{\partial t} = H\left(q, \frac{\partial S_{\rm cl}}{\partial q}\right) \tag{25}$$

を得る．これはハミルトン–ヤーコビの方程式 (13) に他ならない．

4. 解析力学から統計力学へ

統計力学はもともと（マクロな）熱現象を（ミクロな）力学に還元しようとする運動論的なものから生まれてきた．統計力学の建設に，気体分子運動論が重要な役割を果たしたことはよく知られている．気体の圧力を気体分子の運動量の変化（力積）の時間平均と結びつけ，気体の内部エネルギーを気体分子の力学的エネルギーと同一視することによって，（理想気体に対して）温度という熱力学量を運動エネルギーの平均値と関係づけることができた．問題はこの「平均値」がどう決まるかであり，ここに単なる力学とは異なる統計力学的考察が現れる．

カノニカルアンサンブルの理論では，温度 T で指定される熱浴とエネルギーのやりとりをして熱平衡にある系が，エネルギー E_l を持つ状態 l にある確率が $e^{-E_l/k_{\mathrm{B}}T}$ に比例することが示される．k_{B} は**ボルツマン定数**である．**分配関数** $Z(T)$ を

$$Z(T)=\sum_l e^{-E_l/k_{\mathrm{B}}T}=\sum_l e^{-\beta E_l} \qquad (26)$$

で定義する．ここで $\beta=1/k_{\mathrm{B}}T$ を導入した．和は系のすべての量子状態についてとる．$Z(T)$ は系のハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_l \langle l|e^{-\beta\hat{H}}|l\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right) \end{aligned} \qquad (27)$$

と書くことができる．トレースを用いると行列の基底の選び方によらないことが明白になる．

物理量 A についての統計的平均は

$$\begin{aligned} \langle A\,\rangle &= \frac{1}{Z(T)}\sum_l \langle l|\hat{A}\,|l\rangle\, e^{-\beta E_l} \\ &= \frac{1}{Z(T)}\mathrm{Tr}\left(\hat{A}\,e^{-\beta\hat{H}}\right) \end{aligned} \qquad (28)$$

で与えられる．

1 辺の長さが L の立方体に閉じ込められた単原子分子ボーズ粒子理想気体の場合，分子の質量を m とし，気体に含まれる分子数を n とすると，そのハミルトニアンは

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m}|\hat{\boldsymbol{p}}_i|^2 \qquad (29)$$

と与えられる．ただし運動量 $\hat{\boldsymbol{p}}$ の固有値は周期的境界条件を課すと $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}=(\frac{2\pi\hbar}{L})\hat{\boldsymbol{k}}$ と書かれる．$\hat{\boldsymbol{k}}$ は成分が整数であるベクトルである．このとき，分配関数は運動量演算子の固有状態を基底としてトレースを計算して

$$\begin{aligned} Z(T) &= \frac{1}{n!}\sum_{\hat{\boldsymbol{k}}_1}\cdots\sum_{\hat{\boldsymbol{k}}_n} e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}i}|^2} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\sum_{\hat{\boldsymbol{k}}} e^{-\frac{\beta}{2m}|\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}|^2}\right]^n \end{aligned} \qquad (30)$$

と書かれる[*5]．L が十分大きく状態密度を連続的と近似できる場合，和 $\sum_{\hat{\boldsymbol{k}}}$ は積分 $\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3\boldsymbol{p}$ $(V=L^3)$ で近似できる．これを**古典的近似**という．このとき分配関数は

$$Z_{\mathrm{cl}}(T)=\frac{V^n}{n!}\int\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3\boldsymbol{p}_i}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m}|\boldsymbol{p}_i|^2} \qquad (31)$$

となる．

単原子分子理想気体では，ハミルトニアンは運動量にしか依存しないが，より一般的な系（たとえば 2 原子分子気体，調和振動子の系など）では座標にも依存する．このとき分配関数は古典的近似で

$$Z_{\mathrm{cl}}(T)=\mathcal{N}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{dq_i dp_i}{2\pi\hbar}e^{-\beta H(q,p)} \qquad (32)$$

と表すことができる（$\mathcal{N}$ は式 (31) の $1/n!$ に類した定数）．この表式を見れば，ハミルトン形式の力学との関連性は明白だろう．

5. まとめとその後の力学

今まで述べてきたように，力学は解析力学の形

*5) 因子 $1/n!$ は量子力学における同種粒子の不可弁別性による．

で抽象化・一般化され，20 世紀初頭の量子力学の発展を準備し，古典系とそれに対応する量子系の関係を，量子化という手続きとして整理するのに役立った．また，解析力学の一般性は電磁場のような「力学」とはほど遠い系のダイナミクスを記述することも可能にした．**場の量子論**もまた，電磁場と同様に解析力学の言葉で表現され，古典場を演算子にするという量子化の手続きによって構成される．特に非可換ゲージ理論は電磁場と同様の特異系であり，その解析力学的理解が量子化の際には非常に重要だった．

一方，力学は解析力学が完成した後で全く違う方向へも発展し始めたのである．ポアンカレは 3 体問題を考察するうちに，求積法によって解を得ることができないことに気がついた．この研究はその後，非線形な方程式に特徴的な**カオス**現象の研究へと発展していった．非線形微分方程式の多くは解析的には解けない．解けなくても漸近的挙動などの性質を議論することはできる．コンピュータの発展によって様々な非線形現象について詳しく研究されるようになってきている．

また，非線形な方程式であっても，解析的に解ける特殊な例がいくつかある．これらの例では十分な数の保存量があり，そのために積分可能になっている．こうした**可解系**の研究もカオスとはまた別の非線形な系の性質を明らかにするものとして興味深いものである[3)]．

参考文献

1) 解析力学の参考書として，ランダウ，リフシッツ：『力学』（増訂第 3 版）（東京図書）；ゴールドスタイン，サーフコ，ポール：『古典力学』（上，下）（吉岡書店）；山本義隆，中村孔一：『解析力学 I, II』（朝倉書店）を挙げておく．

2) P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Pub.).

3) 解けることと解けないことに重点を置いた読みやすい本として，大貫義郎，吉田春夫：『岩波講座 現代の物理学 1 力学』（岩波書店）の第 II 部がある．

（はらだ・こうじ，九州大学基幹教育院）

電磁気学とその発展



出口　真一

1. はじめに

電磁気学[1~8]は，電場と磁場（まとめて電磁場）が関わる自然現象を扱う学問として，物理学のみならず，多くの理工学系分野において必要不可欠である．そのため，大学・高専などでは学生の専門と知識に応じて様々な講義が行われるが，それらの組立て方は大きく2つに分かれる．一つはクーロンの法則から始まり，歴史の流れに沿った帰納的考察を経てマックスウェル方程式にたどり着く組立て．もう一つはマックスウェル方程式を既知とし，そこから演繹的に物理法則や物理現象を導く組立てである．前者が初学者向けと思われるが，本稿では後者を採用する．従って，マックスウェル方程式を知らない読者は，これを単に前提条件と考えていただければ十分である．

電磁気学は，19世紀中盤にマックスウェルによって完成された．その4つの基本法則は，後述のマックスウェル方程式にまとめられる．電磁気学には，**場**という物理的実体とそれによる**近接作用**，という現代物理学の基礎になる概念が含まれている．20世紀に入り，電磁気学は特殊相対論やゲージ理論に発展したが，その意味でも電磁気学を現代物理学の起点と捉えることができる．本稿ではこれらについても述べる．また，現在も研究の対象になっている輻射の反作用を紹介する．

本稿では，媒質のない真空における電磁気学を論じる．また，第8節後半以外ではMKSA単位系を採用し，通常 $\boldsymbol{B}$ と記される磁束密度をあえて磁場と呼ぶ．

2. マックスウェル方程式とローレンツ力

以下，時間を t，空間の1点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と表す．電荷密度 $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$ の電荷と電流密度

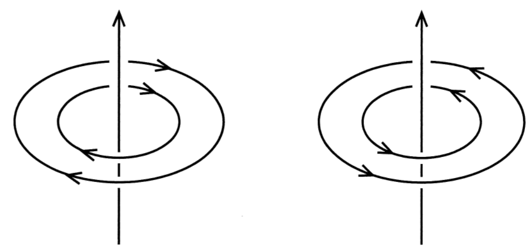


図1　上方向を基準とする左巻きの渦（左図）と右巻きの渦（右図）．

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}, t)$ の電流が与えられたとき，空間に生じる電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と磁場 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ は，次の**マックスウェル方程式**により定まる．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{1d}$$

ここで，∇ は $\boldsymbol{x}$ に関する3次元微分演算子である．また，ϵ_0 は真空の誘電率，μ_0 は真空の透磁率であり，それぞれ $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,[\mathrm{s^4A^2/(m^3kg)}]$，$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,[\mathrm{m{\cdot}kg/(s^2A^2)}]$ と与えられる．式(1a)は**ガウスの法則**であり「電荷があると，それを源として電場が湧き出す」ことを表している．式(1b)は「磁場の湧き出しの源（磁気単極子）は存在しない」ことを意味している．式(1c)は**アンペール・マックスウェルの法則**であり「電場の時間変化や電流があると，それらの方向を基準にして右巻きの磁場の渦が生じる」ことを表している（図1右）．式(1d)は**ファラデーの法則**であり「磁場の時間変化があると，その方向を基準にして左巻きの電場の渦が生じる」ことを表してい

る（図 1 左）．

電磁気学はマックスウェル方程式を与えれば事足りるわけではない．マックスウェル方程式は，電荷と電流が与えられたときに電場と磁場を定めるが，一方で電場と磁場が与えられたとき，それらが電荷と電流に及ぼす作用を決める方程式が必要になる．このような方程式は，電荷を担う対象によって異なるが，以下では，力学的に簡単な電荷 e，質量 m の荷電粒子（電荷をもつ点粒子）を対象とし，それが従う運動方程式を考える．荷電粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$ と表すとき，運動方程式（ニュートン方程式）は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},t) + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},t)\big) \qquad (2)$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{v} := \frac{d\boldsymbol{X}}{dt}$ は粒子の速度ベクトルである．この方程式の右辺は**ローレンツ力**と呼ばれ，電場と磁場が荷電粒子に及ぼす力を表す．このような粒子の電荷密度と電流密度は $\rho(\boldsymbol{x},t) = e\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t))$，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(t)$ で与えられる．ここで，$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})$ は 3 次元のデルタ関数であり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$ のときに無限大，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{X}$ のときに 0 になる．また，性質の良い関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対して $\int_V f(\boldsymbol{x})\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X})d^3x = f(\boldsymbol{X})$ $(\boldsymbol{X} \in V)$ が成り立つ．デルタ関数は，電荷 e が $\boldsymbol{X}$ で指定される 1 点に集中していることを表現している．

3. 電磁波と光

荷電粒子が存在しない領域を考えよう．このような領域では $\rho = 0, \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ であるから，マックスウェル方程式 (1) は電場と磁場だけを含む方程式になる．この方程式から波動方程式

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{0},\\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \qquad (3)$$

を導くことができる．ここで，c は $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ で定義される定数，$\nabla^2 := \nabla\cdot\nabla$ はラプラシアンである．式 (3) は特殊解として平面波解 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)$ をもつ．ここで，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は電場と磁場の振動方向および最大振幅を定めるベクトル，$\boldsymbol{k}$ は波の進行方向を向く波数ベクトル，ω は $\omega = c|\boldsymbol{k}|$ で定まる角振動数である．この解を式 (1d) に代入すると $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} = \omega\boldsymbol{b}$ が得られ，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が互いに直交することが示される．以上のことから，電場と磁場は直交し，速さ c の横波（進行方向と振動方向が直交する波）として空間を伝播することがわかる（図 2）．このような波は**電磁波**と呼ばれ，その存在は 1864 年にマックスウェルにより予言された．また，c の定義式に ϵ_0 と μ_0 の値を代入すると，c の値が $c = 2.998\times10^8$[m/s] と求まり，真空中の光速度に一致する．実際にマックスウェルは，当時の実験値を用いて同様の考察を行い，光は電磁波であると結論づけた．電磁波の存在とそれが光速度で伝わることは，1888 年にヘルツにより実験的に検証され，マックスウェルによって完成された電磁気学の正当性が立証された．

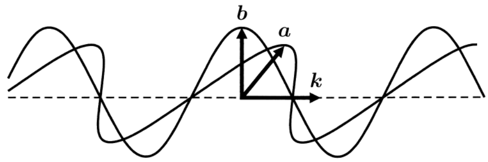


図 2　電磁波の進行方向と電磁場の振動方向．

4. 電磁場のエネルギーと保存則

再び電荷粒子を考慮に入れて話を進める．荷電粒子を含む空間領域 V を設定し，積分量 $H_V = \int_V \mathcal{H}d^3x$ を考える．ただし，$\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \qquad (4)$$

で定義される．マックスウェル方程式とガウスの発散定理を用いると，H_V の時間微分は

$$\frac{dH_V}{dt} = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} - \int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}d^3x \qquad (5)$$

と書くことができる．ここで，$\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ で定義され，$d\boldsymbol{S}$ は V の境界 S の外向き面要素ベクトルである．いま，荷電粒子の電流密度を式 (5) に代入し，デルタ関数の性質と運動方程式 (2) を用いると

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + H_V\right) = \oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6)$$

が得られる．特に，V を全空間 V_∞ に選び，H_{V_∞} が有限になるように遠方で $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が十分早く $\boldsymbol{0}$ になると仮定すると，式 (6) の右辺は 0 になる．このとき，$\frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + H_{V_\infty}$ は時間が経過しても変わらず，保存することがわかる．ここで，$\frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2$ は荷電粒子の運動エネルギーであるから，それに付加される H_{V_∞} は電磁場のエネルギーと解釈できる（従って，$\mathcal{H}$ は電磁場のエネルギー密度である）．このように，一般に荷電粒子だけではエネルギーは保存せず，電磁場のエネルギーを

加えることでエネルギー保存則が成立する．式 (6) 自体は，V 内のエネルギーの減少率が，境界 S から単位時間に流れ出すエネルギーに等しいことを意味している．ベクトル $\boldsymbol{P}$ は電磁場のエネルギーの流れを表しており，**ポインティングベクトル**と呼ばれる．

エネルギーと同じことは，運動量と角運動量についても言える．実際に，上と同様の考察を行なうことで，電磁場の運動量密度と角運動量密度は，それぞれ $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\mathcal{M}}$ であることがわかり，対応する保存則も導出できる．以上のことから，電磁場はエネルギー，運動量，角運動量をもつ物理的実体であり，力学の対象になることがわかる．

5. ゲージポテンシャルとゲージ変換

全空間で式 (1b) を満たす $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{7}$$

と表せる．ここで，$\boldsymbol{A}$ はベクトル値関数であり，その 3 成分はすべて $\boldsymbol{x}$ と t の滑らかな関数である（特異性をもつ $\boldsymbol{A}$ を考えるならば，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \neq 0$ となり得る．磁気単極子を論じるときは，半直線状または直線状の特異性をもつ $\boldsymbol{A}$ が採用される[9]）．式 (7) を式 (1d) に代入すると，$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{0}$ が得られる．この式が全空間で成り立つとき，$\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{x}$ と t の滑らかな関数 ϕ を導入して

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{8}$$

と表せる．関数 ϕ と $\boldsymbol{A}$ は，まとめて**ゲージポテンシャル**と呼ばれる．これらを用いるならば，式 (7) と式 (8) を考慮した上で，マックスウェル方程式として式 (1a) と式 (1c) だけを考えれば十分である（マックスウェル自身は，ゲージポテンシャルを用いて電磁気学を定式化した[1]．マックスウェル方程式と称される式 (1) は，後にヘヴィサイドとヘルツが与えたものである）．

古典論において，ゲージポテンシャルは問題を解き易くするための道具として重宝されるが，量子論においては，その存在が本質的である．例えば，荷電粒子に対するシュレディンガー方程式は，電場と磁場ではなく，ゲージポテンシャルを基本的な量として含んでいる．また，この方程式から導かれるゲージポテンシャルの効果（**アハラノフ・ボーム効果**）は，外村が行った実験で検証されている[10,19]．

電場と磁場が与えられたとき，ゲージポテンシャルが一義に決まるわけではない．事実，ゲージポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と ϕ を

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\lambda \tag{9}$$

で定義される $\boldsymbol{A}'$ と ϕ' に変換しても，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は変わらない（ここで，λ は $\boldsymbol{x}$ と t の滑らかな関数とする）．このような変換は**ゲージ変換**と呼ばれ，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ はゲージ不変であると言われる．ゲージ不変性のため，ゲージポテンシャルで書かれたマックスウェル方程式の解は関数 1 個分だけ決まらない．そこで，実際はゲージポテンシャルに $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ または $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ などのゲージ条件を課して解を定めることが多い．前者は**クーロン条件**，後者は**ローレンス条件**と呼ばれる．ゲージ条件は，問題に応じて適切なものを選べば良い．

6. 電磁気学から特殊相対論へ

電磁気学は光速度 c を普遍定数として含んでいる．このことは，ニュートン力学との兼ね合いで 19 世紀末に大きく問題視された．この問題の解決策として，マックスウェル方程式が成り立つ特別な系（絶対静止系）の存在が論じられたが，このような系は実験で確認されなかった．こうした中，アインシュタインは 1905 年に光速度の不変性と慣性系間の同等性を基本原理とする**特殊相対論**を提唱した．この理論は，マックスウェル方程式 (1) が任意の慣性系で成り立つことを保証する一方で，ニュートン力学の変更を要請する（従って，式 (2) も修正する必要がある）．歴史的な流れを見る限り，特殊相対論は電磁気学の研究の産物と言える．

特殊相対論では，時間と空間を一まとめにした**4 次元時空**（**ミンコフスキー空間**）を考える（図 3）．これにより，電磁気学の各式は簡潔な形に書き直すことができる．初めに，$x^0 := ct$ と $\boldsymbol{x}$ を 4 元位置ベクトル $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ にまとめ，これが 4 次元時空

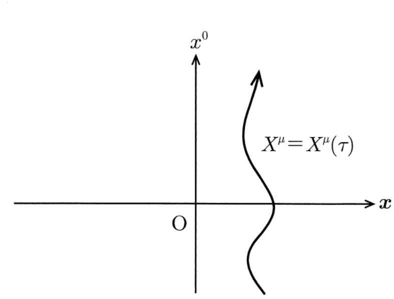


図 3　4 次元時空と粒子の世界線．

の1点を指定するものとする．今後，x の成分を x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ と書く．これに準じて，ゲージポテンシャルも $A=\left(\frac{1}{c}\phi,-\boldsymbol{A}\right)$ のような4元ベクトルと考え，その成分を A_μ と書く*1)．電場と磁場に関しては，それらの成分表示 $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,E_3)$, $\boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)$ から反対称行列

$$F=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

を定義し，その成分を $F_{\mu\nu}$ と書く．微分演算子 $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を用いると，式 (7) と式 (8) はまとめて

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{11}$$

と書ける．さらに，4元電流密度を $J=(c\rho,-\boldsymbol{J})$ と定義すると，式 (1a) と式 (1c) はまとめて

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\mu \tag{12}$$

と書ける．一方，式 (1b) と式 (1d) は，$\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\rho F_{\mu\nu}=0$ と表されるが，式 (11) があるために，この式は恒等式になる．ゲージ変換は

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu+\partial_\mu\lambda \tag{13}$$

となり，ローレンス条件も簡潔に $\partial^\mu A_\mu=0$ と書くことができる．

既に述べたように，電磁場は力学の対象になる．従って，電磁場の解析力学を考察することは自然である．実際に，式 (11) を考慮に入れて作用積分を

$$S_{\mathrm{E}}=\frac{1}{c}\int\left(\frac{-1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-A_\mu J^\mu\right)d^4x \tag{14}$$

と与え，これを A_μ で変分して最小作用の原理を適用すると式 (12) が得られる．この手法では A_μ が力学変数であり，$F_{\mu\nu}$ はそれから定まる2次的な量である．

いま，荷電粒子が4次元時空に描く世界線を考え，これを $X^\mu=X^\mu(\tau)$ と表す（図3）．ただし，τ は世界線のパラメータであり，$\frac{dX^0}{d\tau}>0$ を満たす．このとき，荷電粒子の4元電流密度は，$\dot{X}^\mu := \frac{dX^\mu}{d\tau}$ を用いて

$$J^\mu(x)=ec\int \dot{X}^\mu(\tau)\delta^4(x-X(\tau))d\tau \tag{15}$$

と書くことができる．式 (15) を式 (14) に代入し，それに粒子の作用積分 $S_{\mathrm{P}}=-mc\int\sqrt{\dot{X}_\mu\dot{X}^\mu}\,d\tau$ を付け加えた $S_{\mathrm{E}}+S_{\mathrm{P}}$ は，電磁場と荷電粒子からなる系の作用積分である．これを X^μ で変分すると，運動方程式

$$mc\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{\dot{X}_\nu\dot{X}^\nu}}=eF^{\mu\nu}(X)\dot{X}_\nu \tag{16}$$

が得られる．この式は，式 (2) を特殊相対論に適応するように修正したものである．実際に $\tau=\frac{X^0}{c}$ として，非相対論的極限（$c\to\infty$）を取ると，式 (16) は式 (2) に帰着する．解析力学の利点の一つは，**ネーターの定理**によって，対称性から保存則を導出できることにある．事実，$S_{\mathrm{E}}+S_{\mathrm{P}}$ が4次元時空の平行移動と回転のもとで変化しないことから，いま考えている系のエネルギー，運動量，角運動量の保存則を系統的に導くことができる．

7. 放射の反作用

ローレンス条件を採用すると，式 (12) は4元電流密度付きの波動方程式 $\Box A_\mu=\mu_0 J_\mu$（$\Box:=\partial^\nu\partial_\nu$）になる．この式は，$\Box G(x)=\delta^4(x)$ を満たすグリーン関数 G を用いて，$A_\mu(x)=\int G(x-y)J_\mu(y)d^4y$ と解くことができる．この解の4元電流密度に式 (15) を代入すると，荷電粒子によるゲージポテンシャル

$$A_\mu(x)=ec\int\dot{X}_\mu(\tau')G(x-X(\tau'))d\tau' \tag{17}$$

が得られ，さらにこれを式 (11) に代入することで荷電粒子が放射する電磁波を求めることができる．荷電粒子が電磁波を放射するとき，その粒子は**放射の反作用**を受ける．放射の反作用の効果を取り入れた荷電粒子の運動方程式は，式 (17) から定まる $A^\mu(X(\tau))$ を式 (16) の右辺に代入することで導出できる．

放射の反作用を具体的に評価するため，G として因果律に即した**遅延グリーン関数** $G_{\mathrm{R}}(x)=\frac{1}{2\pi}\delta(\sigma)\theta(x^0)$ $(\sigma:=x_\mu x^\mu)$ を採用する．ここで，θ は階段関数である．関数 G_{R} は原点 $x=0$ で数学的に定義されないため，σ を $\sigma-\varepsilon^2$ に置き換えて正則化する．ただし，ε は正の無限小定数である．正則化した遅延グリーン関数を用いて式 (16) の右辺を計算し，外部電磁場 $F^{\mu\nu}_{\mathrm{ext}}$ の寄与を加えることで，最終的に次の方程式が得られる．

$$m_{\mathrm{r}}c\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{\dot{X}_\nu\dot{X}^\nu}}=eF^{\mu\nu}_{\mathrm{ext}}(X)\dot{X}_\nu$$

---

*1) 成分が上付きの添字をもつ (V^μ) は**反変ベクトル**，成分が下付きの添字をもつ (V_μ) は**共変ベクトル**と呼ばれる．反変成分と共変成分は $V_\mu=\eta_{\mu\nu}V^\nu$, $V^\mu=\eta^{\mu\nu}V_\nu$ で関係付けられる．ここで，$(\eta_{\mu\nu})$ と $(\eta^{\mu\nu})$ は対角成分が $(1,-1,-1,-1)$ である対角行列である．また，上下の同じ添字 ν に関しては，$\sum_{\nu=0}^{3}$ のような和を取るものと理解する．

$$+\frac{2}{3}\beta\left(\frac{\dddot{X}_{\perp}^{\mu}}{\dot{X}_{\nu}\dot{X}^{\nu}}-\frac{3\dot{X}_{\nu}\ddot{X}^{\nu}\ddot{X}_{\perp}^{\mu}}{(\dot{X}_{\nu}\dot{X}^{\nu})^{2}}\right). \quad (18)$$

ここで，β は $\beta=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c}$ で定義される定数，$m_{\rm r}:=m+\frac{\beta}{2c}\varepsilon^{-1}$ は繰り込まれた質量，$\ddot{X}^\mu$ と $\dddot{X}^\mu$ は X^μ の τ に関する 2 階微分と 3 階微分である．また，任意のベクトル V に対して，その垂直成分は $V_\perp^\mu=V^\mu-\frac{\dot{X}_\rho V^\rho}{\dot{X}_\nu\dot{X}^\nu}\dot{X}^\mu$ と定義される．特に τ を固有時に選ぶと，$\dot{X}_\nu\dot{X}^\nu=c^2$ が成り立つため，式 (18) は次のようになる．

$$m_{\rm r}\ddot{X}^\mu=eF_{\rm ext}^{\mu\nu}(X)\dot{X}_\nu+\frac{2\beta}{3c^2}\dddot{X}_\perp^\mu. \quad (19)$$

この式は 1938 年にディラックにより導かれたもので，**ローレンツ・ディラック（LD）方程式**と呼ばれる[4, 11)]（ディラックは $G_{\rm R}$ と先進グリーン関数 $G_{\rm A}$ からなる $\frac{1}{2}(G_{\rm R}-G_{\rm A})$ を採用し，質量の繰り込みを必要としない定式化を与えた）．一方，式 (18) で $\tau=\frac{X^0}{c}$ と置き，非相対論的極限を取ると次式が得られる．

$$m_{\rm r}\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{f}_{\rm ext}+\frac{2\beta}{3c^2}\ddot{\boldsymbol{v}}\quad\left(\boldsymbol{v}:=\dot{\boldsymbol{X}}\right). \quad (20)$$

ここで，$\boldsymbol{f}_{\rm ext}$ は外部電磁場によるローレンツ力を表す．式 (20) は，**ローレンツ・アブラハム（LA）方程式**と呼ばれ，20 世紀初頭に電子模型の研究で見出された[3, 12)]．

さて，式 (19) や式 (20) は位置ベクトルの 3 階微分を含む奇妙なものであり，解を導く際に粒子の初期位置と初期速度以外の条件を必要とする．また，これらの方程式は，外力がなくても独りでに加速する粒子を表す**暴走解**（runaway solution）や因果律を破る**先行加速解**（pre-acceleration solution）などの現実離れした解を与える[2, 3)]．以上のような問題を回避・解決するために，最近まで様々な取組みが行われてきた．古くはランダウとリフシッツによる方法があるが，これは反復法を適用し，$\frac{2\beta}{3c^2 m_{\rm r}}$ が十分小さいとして式 (19) や式 (20) を 2 階の微分方程式で近似するものである[2)]．この方程式の解は物理的に正しく振る舞うことが確認されており[13)]，近似の正当性も論じられている[14)]．また最近では，量子効果による電磁場の非線形項を LD 方程式に取り入れて，暴走解の出現を回避する試みがある[15)]．一方，式 (18) を導くラグランジアンが提案されており[16)]，LD 方程式を解析力学の立場から検討することも考えられる．放射の反作用の研究は 100 年以上の歴史を持つものの，いまだに未完成である．しかし，超高強度レーザーと高エネルギー電子を用いた放射の反作用の実験的検証が可能になりつつある現在[17)]，放射の反作用の無矛盾な定式化が必須となっている．

8. 電磁気学からゲージ理論へ

素粒子論や物性論の基礎である**場の理論**では，荷電粒子の代わりに，複素数に値を取る**複素場** $\psi=\psi(x)$ を考える（荷電粒子は ψ の量子化により得られる）．**ゲージ理論**[18, 19)]は場の理論の一種であり，ψ のような場を局所連続変換したとき，作用積分が不変のまま残ることを指導原理とする．局所連続変換の “局所” は，変換のパラメータが x^μ の関数であること，すなわち時空の各点で異なる連続変換を行うことを意味する．以下に述べるように，電磁気学はゲージ理論として再構成できる．

初めに，ψ の力学系とそれを記述する作用積分を与える．この系は，言わば荷電粒子のみの系で，そこに電磁場は存在しない．次に，作用積分は**局所位相変換**

$$\psi\to\psi'={\rm e}^{i\Lambda}\psi,\quad \psi^*\to\psi^{*\prime}={\rm e}^{-i\Lambda}\psi^* \quad (21)$$

（$\Lambda:=e\lambda(x)/\hbar$, $\hbar$ は量子論を考慮して導入されたディラック定数）の下で不変に残るべき，という要請をする．このときゲージポテンシャル A_μ の導入が必要になり，ψ, ψ^*, A_μ で書かれる修正された作用積分が求まる．実際に，この作用積分は式 (21) と式 (13) の変換を同時に行ったときに不変になる．さらに，式 (11) に従って A_μ から電磁場 $F_{\mu\nu}$ が定義され，その作用積分が式 (14) で $J^\mu=0$ と置いた形に決まる．これに上述の修正された作用積分を加えることで，複素場と電磁場からなる系の電磁気学が構成できる．

上の議論は次のように一般化できる（以後，$c=\hbar=1$ である自然単位系を採用する）．まず，ψ の代わりに N 個の複素場を成分に持つ列ベクトル $\Psi=\Psi(x)$ を用意し，局所位相変換の代わりに**局所ユニタリー変換**

$$\Psi\to\Psi'=U\Psi,\quad \Psi^\dagger\to\Psi^{\dagger\prime}=\Psi^\dagger U^\dagger \quad (22)$$

を考える．ここで $U=U(x)$ は $N\times N$ ユニタリー行列である．式 (22) の局所変換の下で不変になる作用積分を構成するためには，この変換と同時に

$$\mathcal{A}_\mu\to\mathcal{A}'_\mu=U\mathcal{A}_\mu U^\dagger+ig^{-1}U\partial_\mu U^\dagger \quad (23)$$

のように変換する $N\times N$ エルミート行列型のゲージポテンシャル $\mathcal{A}_\mu$ が必要になる．ここで g は無次元の結合定数である．電磁場 $F_{\mu\nu}$ の対応物は

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathcal{A}_\nu-\partial_\nu\mathcal{A}_\mu-ig[\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu] \quad (24)$$

であり，その作用積分は

$$S_{\mathcal{F}} = \int \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\right) d^4x \qquad (25)$$

と与えられる．こうして得られるゲージ理論は，**ヤン・ミルズ理論**と呼ばれ，1954 年にヤンとミルズにより提唱された[20)]（ヤンとミルズは行列 U が SU(2) の元である場合を論じた）．現在，ヤン・ミルズ理論は素粒子間に働く力を記述する基礎的な枠組みと位置付けられている．クォーク間に働く**強い力**を記述する**量子色力学**は，U がカラー SU(3) の元であるヤン・ミルズ理論を量子化したものである．そこでは，式 (24) の交換関係 $[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$ が存在することにより，**漸近自由性**のような特徴的な性質が現れる．また，U を SU(2)×U(1) の元と考え，**ヒッグス機構**を加味したものが，**電磁力**と**弱い力**の統一理論である**ワインバーグ・サラム理論**である．この理論では，行列 $\mathcal{A}_\mu$ の要素の 1 つが電磁場のゲージポテンシャル A_μ になる．さらに，重力の理論である**一般相対論**は，式 (25) と異なる形の作用積分をもつゲージ理論として再構成できる[21)]．

9. おわりに

本稿では，電磁気学の古典論的側面に注目してきた．電磁気学の量子論的側面は，荷電粒子・荷電反粒子（電子・陽電子など）と光子の相互作用を扱う**量子電磁力学**（**QED**）で論じられる[5, 18)]．そこでは，ψ, ψ^*, A_μ に量子化の手続きを施すことで，荷電粒子，荷電反粒子，光子が得られる（正準量子化では ψ, ψ^*, A_μ が演算子として扱われ，マックスウェル方程式も演算子に対する方程式になる）．QED の研究は，現在場の量子論で特に重要視される**繰り込み**の概念を生み出した．また 2012 年の段階で，QED の計算で求められた電子の異常磁気能率の理論値は，10^{-12} という驚異的な次数まで実験値に一致することが報告されている[22)]．

以上のことから電磁気学は，マクロの世界から素粒子レベルのミクロの世界まで，普遍的に成立する大変優れた理論体系であると言える．

本稿の執筆にあたり，有益なコメントを下さった菅仁志氏と瀬戸慧大氏に感謝します．

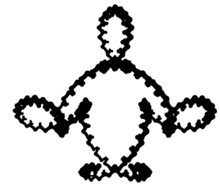
参考文献

1) J.C. Maxwell: *A treatise on electricity and magnetism*, 2 vols., 3rd ed., Dover, New York, 1954.
2) L.D. Landau and E.M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975［恒藤敏彦，広重徹共訳：『場の古典論』，東京図書，1978］．
3) J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1998［西田稔訳：『ジャクソン・電磁気学（上・下）』，吉岡書店，上：2002，下：2003］．
4) A.O. Barut: *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, New York, 1980.
5) 高橋康：『電磁気学再入門—QED への準備』，講談社，1994.
6) 牟田泰三：『電磁力学』，現代物理学叢書，岩波書店，2001.
7) 岡真：『電磁場の古典論』，新物理学シリーズ 39，培風館，2009.
8) 太田浩一：『電磁気学の基礎 I, II』，東京大学出版会，2012.
9) 半直線状の特異性をもつ $\boldsymbol{A}$ はディラック型，直線状の特異性をもつ $\boldsymbol{A}$ はシュウィンガー型と呼ばれる．これらに関しては，例えば次の文献を参照のこと．Y. Shnir: *Magnetic Monopoles*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
10) M. Peshkin and A. Tonomura: *The Aharonov-Bohm Effect*, Lecture Notes in Physics, Vol.340, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
11) P.A.M. Dirac: *Proc. Roy. Soc. London A* **167**, 148 (1938).
12) H.A. Lorentz: *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, 2nd ed., Dover, New York, 1952［広重徹訳・解説：『ローレンツ 電子論』，物理科学の古典 6，東海大学出版会，1973］．
13) S.G. Rajeev: *Ann. Phys.* **323**, 2654 (2008).
14) H. Spohn: *Europhys. Lett.* **50**, 287 (2000).
15) K. Seto, S. Zhang, J. Koga, H. Nagatomo, M. Nakai, and K. Mima: *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2014**, 043A01 (2014).
16) S. Deguchi, K. Nakano, and T. Suzuki: in preparation.
17) K. Seto, J. Koga, and S. Zhang: *The Review of Laser Engineering*, **42**, 174 (2014).
18) 藤川和男：『ゲージ場の理論』，現代物理学叢書，岩波書店，2001.
19) 別冊数理科学「ゲージ理論の発展」，2009 年 7 月号，サイエンス社，2009.
20) G. 't Hooft (Editor): *50 Years of Yang-Mills Theory*, World Scientific, Singapore, 2005.
21) 内山龍雄：『一般ゲージ場論序説』，岩波書店，1987.
22) T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio: *Phys. Rev. Lett.* **109**, 111807 (2012).

（でぐち・しんいち，日本大学理工学部）

熱・統計力学

量子力学による基礎付けは可能か？



早川　尚男

1. はじめに

通常，熱・統計力学と一括りにされているが，必ずしもそれを構成する熱力学と統計力学の相性は良くない．実際，英語では熱力学は thermodynamics であり，統計力学は statistical mechanics であることから分かるように，前者は状態変化の動力学を論じ，後者は通常の力学に基づいて多体系の統計的性質を記述している．

熱力学は歴史的にも熱機関の効率の向上を図る必要に迫られて生まれた学問である．その歴史からも工学との繋がりは深く，現在も伝熱工学等のような機械工学の一部や原子核工学は熱力学と深い関わりを持っている．

その一方で**統計力学**は力学・解析力学をベースにして熱力学量のような巨視的観測量を計算する学問分野である．低温で量子効果が重要になる場合は，量子力学に基づき分配関数等を計算するので，量子力学との関連は深い．量子効果の入った統計力学を量子統計力学と特に呼ぶ場合もある．言うまでもないことであるが，物性物理[*1)]では常に多体問題を議論するので，必ず統計力学を基礎とする．物性物理の中で，今日凝縮系の物理と呼ばれている分野では量子力学と統計力学が両輪となっているが，ソフト凝縮系の物理のように必ずしも量子力学を必要としない物性物理の分野も数多く存在する．とりわけ物性物理で電気伝導を研究対象にすることが多いので電磁気学（および量子力学）と統計力学を組み合わせることは物性物理ではごく普通に行われている．相対論と熱・統計力学を組み合わせることは，著者の業界ではポピュラーではないが，天体物理屋にとっては当り前のことであろう．実際，Fermi 粒子の縮退圧によって白色矮星や中性子星等のコンパクト星が現れることからも自明に両者は不可分である．特に超相対論的な分散関係式を用いた Chandrasekhar の白色矮星に対する理論は標準的な統計力学の教科書で説明されている[1)]．また一般相対論の延長上に（量子）重力理論があるが，ブラックホールの熱力学およびその蒸発の際に出す Hawking 輻射は熱・統計力学との深い関わりを示唆している．素粒子物理においても素粒子の統計的性質は無視できない．特にクォークの閉じ込めに関する QCD（quantum chromodynamics）については統計力学との関わりが深い．実際，ハドロンが Fermi 統計を満たすためにカラー自由度が導入され，さらに統計力学，特に臨界現象へのくりこみ群の応用でノーベル賞を取った Wilson によって QCD の基礎的な理論形式として格子ゲージ理論が導入されたことからもその深い関わりは明らかである[2)]．

このように熱・統計力学は本特集で紹介される物理学の各分野と多かれ少なかれ関係がある．また対象の詳細によらず普遍的な枠組みを与えるという学問の性格から数学との関わりも深く，応用

*1)　これに対応する英語はない．

分野は化学，地学，生物といった理学的分野に留まらず伝統的な工学，農学，情報学のみならず経済学までを含んで多岐にわたっている．

このような多様かつ幅広い熱・統計力学と他の学問分野を短いページで概観するのは不可能である．従って本稿では，量子力学と熱・統計力学との関わりに焦点を絞ることにする．本稿では，次節で熱・統計力学および量子力学との関わりについてごく簡単に良く知られた歴史的事実を紹介する．第3節では**恒等式**に基づき量子力学と（非平衡）統計力学の対応を見る．第4節では線形非平衡系での良く知られた**線形応答理論**と第3節で議論した恒等式の関係を論じる．第5節では，孤立量子系で熱平衡状態が如何に実現するかという点について最近の研究の動きをごく短く紹介する．

2. 歴史的概観

熱力学の講義を受ければ分かる通り，熱力学の原理は力学のそれとは独立である[3,4]．その独立性は19世紀末から20世紀初頭にかけて猛威を振るった熱力学至上主義者のエネルギティーケの活躍と統計力学の開祖とも言えるBoltzmannとの間の苛酷な論争を振り返れば十分に知ることができる．ここで言う熱力学至上主義とは，当時直接観測ができなかったが作業仮説としての有効性は立証されていた原子・分子を実在するものとはせず，寧ろ直接観測にかかる諸量を予言する熱力学こそすべての学問の基礎たるべきという思想である．

そもそもBoltzmannが統計力学を創設したのは，熱力学と力学との相性の悪さを解消したいためであった．最大の問題点は力学は可逆でありながら，熱力学で記述されるマクロな系では不可逆になっている点である．その両者の矛盾を解決するためにBoltzmannはBoltzmann方程式を導入したが，それが新たな論争を生んだことは既述の通りである．

その当時，ヨーロッパでの激しい論争から遠く離れたアメリカにGibbsがいた．驚くべきことにGibbsは，独力平衡統計力学の枠組みを完成し，20世紀冒頭に今日でも通用する教科書を上梓した[5]．Gibbsは，Boltzmannが夢見た熱力学に現れる不可逆性と力学の可逆性の矛盾の解決を棚上げしたために成功したとも言える．しかし，それはGibbsはその問題の難しさを知り抜いていたからと言ったほうが適切である．

一方で19世紀末に量子論の産婆役を務めたのは間違いなく熱・統計力学であった．特に黒体輻射の問題は多くの研究者の頭を悩ませたが，PlanckによるPlanck定数 h とBoltzmann定数 k を同時に導入した記念碑的論文[6]で量子論の扉を開いた[*2]．エネルギティーケとの論争の終止符はEinsteinによるBrown運動の理論や様々なAvogadro数の推定とそれを裏付けるPerrinの実験によって打たれたと言って良い．その後，量子論と絡んで従来の熱力学では説明できなかった低温領域での比熱の振舞いを量子力学と統計力学を組み合わせることにより説明可能になったことで量子論と統計力学の有効性は揺るぎないものとなった．1924年にはBoseによるPlanck分布の再導出，Einsteinによる再定式化と低温での凝縮の予言，1925年のFermiとDiracによるPauli排他律からのFermi分布の導出ということでほぼ学部で習う材料は出揃ったことになる．興味深いことにこれら量子論の効果を取り入れた統計力学の重要な進展はすべて量子力学の成立前夜までに済んでいる．

3. 恒等式から見る量子力学と統計力学の対応

これまで見たように統計力学と量子力学は現代物理学の両輪として発展してきたが，両者間にはそれだけに留まらない深い形式的対応がある[8,9]．例えばSchrödinger方程式におけるエネルギー固有値 E_r を持つハミルトニアン H の固有状態を $|\psi_r\rangle$ として，w_r を系が状態 $|\psi_r\rangle$ にある確率とし，密度行列を

---

*2) Planckがもともとエネルギティーケであった点は興味深い．彼の熱力学の教科書は名著として知られている[7]．そのせいか初期の量子論の導出はエントロピー経由であった．

$$\rho \equiv \sum_r |\psi_r\rangle w_r \langle\psi_r| \tag{1}$$

とすると，オブザーバブル A の期待値

$$\langle A\rangle \equiv \sum_r w_r \langle\psi_r|A|\psi_r\rangle \tag{2}$$

と密度行列とオブザーバブル A の積のトレースが一致することは以下のようにすぐ分かる：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\rho A) &= \sum_{r,r'} \langle\psi_{r'}|\psi_r\rangle w_r \langle\psi_r|A|\psi_{r'}\rangle \\ &= \sum_{r,r'} \delta_{r,r'} w_r \langle\psi_r|A|\psi_{r'}\rangle \\ &= \langle A\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで正規直交性 $\langle\psi_r|\psi_{r'}\rangle = \delta_{r,r'}$ を用いた．また Schrödinger 方程式 $i\hbar(\partial/\partial t)|\psi_r(t)\rangle = H|\psi_r(t)\rangle$ を密度行列の定義式に代入すると von Neumann 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)] \tag{4}$$

が導かれる．ここで $[H,\rho(t)] = H\rho(t) - \rho(t)H$ である．容易に確かめられる通り，密度行列の時間発展は初期密度行列 ρ に対して

$$\rho(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}}\rho e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \tag{5}$$

で与えられる．この式は Heisenberg 表示のオブザーバブルの発展方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_{\mathrm{H}}(t) = [A_{\mathrm{H}}(t), H], \tag{6}$$

$$A_{\mathrm{H}}(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} A e^{\frac{iHt}{\hbar}} \tag{7}$$

と等しい期待値を与える．実際

$$\begin{aligned}\langle A_{\mathrm{H}}(t)\rangle &= \mathrm{tr}(\rho A_{\mathrm{H}}(t)) = \mathrm{tr}(\rho e^{\frac{iHt}{\hbar}} A e^{-\frac{iHt}{\hbar}}) \\ &= \mathrm{tr}(\rho(t)A)\end{aligned} \tag{8}$$

という式変形ができる*3)．即ち，Heisenberg 表示での期待値の時間発展は密度行列固定でオブザーバブルが時間発展すると考えるが，Schrödinger 表示ではオブザーバブル固定で密度行列が時間発展する．

ここで初期密度行列を逆温度 β の平衡のもの

$$\rho = \rho_{\mathrm{eq}} \equiv \frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{9}$$

としてみよう（$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}$）．トレースの巡回性と (8) 式を用いて形式的に期待値を計算すると

$$\begin{aligned}\langle A_{\mathrm{H}}(t)\rangle &= \frac{1}{Z}\mathrm{tr}(e^{-\beta H} e^{-\beta H} A_{\mathrm{H}}(t) e^{\beta H}) \\ &= \langle A_{\mathrm{H}}(t + i\hbar\beta)\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．このように有限温度を考えることは量子力学的には虚時間発展をすると見做すことができる．(10) 式の導出から分かる通り β を任意の $\beta'(\neq \beta)$ に変えても良いので $\langle A_{\mathrm{H}}(t)\rangle = \langle A_{\mathrm{H}}(t + i\hbar\beta')\rangle$ が成り立つ．このように期待値は任意の虚時間に対して並進対称である．これは平衡密度行列 (9) が時間並進対称性を持つことから導かれる自明な性質である．

同様に時間相関関数に対しても

$$\langle A_{\mathrm{H}}(t) B_{\mathrm{H}}(t')\rangle = \langle B_{\mathrm{H}}(t') A_{\mathrm{H}}(t + i\hbar\beta)\rangle, \tag{11}$$

あるいは $t' = 0$ としたときのその Fourier 変換

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle A_{\mathrm{H}}(t) B\rangle \\ &= e^{-\beta\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle B A_{\mathrm{H}}(t)\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

が成り立つ．(11), (12) 式は当り前の式に見えるが，久保–Martin–Schwinger（KMS）条件と呼ばれる重要な関係式となっている．特に無限自由度系では密度行列やトレースを定義できないので，寧ろ KMS 条件 (11), (12) を充たす状態として平衡状態を定義する．

KMS 条件から僅かの計算で時間相関関数の Fourier 変換であるパワースペクトル $I_{AB}(\omega)$ と緩和関数のスペクトル強度 $f_{AB}(\omega)$ の間の関係式である

$$I_{AB}(\omega) = E_\beta(\omega) f_{AB}(\omega) \tag{13}$$

という式が導かれる．ここでパワースペクトルは

$$I_{AB}(\omega) \equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle B A_{\mathrm{H}}(t) + A_{\mathrm{H}}(t) B\rangle$$

*3） ここでトレースの巡回ルール $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$ を用いた．

$$= g_\beta(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle BA_{\rm H}(t)\rangle \quad (14)$$

という関係式を充たす．ただし $g_\beta(\omega) \equiv (1 + e^{-\beta\hbar\omega})/2$ である．またスペクトル関数 $f_{AB}(\omega)$ および緩和関数 $\Phi_{AB}(t)$ を

$$f_{AB}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\Phi_{AB}(t), \quad (15)$$

$$\Phi_{AB}(t) \equiv \int_0^\beta d\lambda\langle BA_{\rm H}(t+i\hbar\lambda)\rangle \quad (16)$$

で導入すれば

$$f_{AB}(\omega) = \frac{1-e^{-\beta\hbar\omega}}{\hbar\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\langle BA_{\rm H}(t)\rangle$$

と書き換えられるによって (13) 式の $E_\beta(\omega)$ は*4)

$$E_\beta(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \quad (17)$$

で与えられる．

さて (16) 式で導入した $\Phi_{AB}(t)$ を書き換えて，その物理的意味を明らかにしてみよう．単純化のため $A_{\rm H}(t)$, $B_{\rm H}(t)$ は $t\to\infty$ でゼロに減衰するとしよう*5)．さらに時間的に並進対称であって時間相関関数が時間差だけで書けると仮定する．また $\phi_{AB}(t)$ を

$$\phi_{AB}(t) \equiv -\frac{d}{dt}\Phi_{AB}(t) \quad (18)$$

で導入すると

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}(t) &= \int_0^\beta d\lambda\langle B_{\rm H}(-i\hbar\lambda)A_{\rm H}(t)\rangle \\ &= -\int_t^\infty ds\phi_{AB}(s) \quad (19)\end{aligned}$$

と書き換えられる．ただし $\dot{B}_{\rm H}(t) = dB_{\rm H}(t)/dt$ である．従って $\phi_{AB}(t)$ は

$$\phi_{AB}(t) = -\int_0^\beta d\lambda\langle B_{\rm H}(-i\hbar\lambda)\dot{A}_{\rm H}(t)\rangle \quad (20)$$

となる．ここで容易に確かめられるように任意の a, b に対して ${\rm tr}(\rho_{\rm eq}\dot{a}b) = -{\rm tr}(\rho_{\rm eq}a\dot{b})$ が成り立つので

$$\phi_{AB}(t) = \int_0^\beta d\lambda\langle\dot{B}_{\rm H}(-i\hbar\lambda)A_{\rm H}(t)\rangle \quad (21)$$

とも書ける．さらに $\dot{B}_{\rm H}(-i\hbar\lambda) = e^{\lambda H}\dot{B}e^{-\lambda H} = (i/\hbar)e^{\lambda H}[H,B]e^{-\lambda H}$ および，恒等式

$$[B, e^{-\beta H}] = e^{-\beta H}\int_0^\beta d\lambda e^{\lambda H}[H,B]e^{-\lambda H} \quad (22)$$

を用いると*6)従って

$$\begin{aligned}\phi_{AB}(t) &= \frac{i}{\hbar}{\rm tr}([B, e^{-\beta H}]A_{\rm H}(t))/Z \\ &= -\frac{i}{\hbar}\langle[B, A_{\rm H}(t)]\rangle \quad (23)\end{aligned}$$

となる．

ここまで複素平面での正則性，混合性即ち $\lim_{t\to\infty}\langle A_{\rm H}(t)B\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle$ が仮定されているが，それ以外は基本的に平衡状態での量子統計力学の恒等式に基づくものである．しかし (13) は本質的に非平衡状態の関係式であるはずである．

4. 線形応答理論再訪

(4) 式は初期状態に平衡状態を取ると密度行列の時間発展がないので，非平衡状態の記述には不適切である．非平衡状態を記述する一つの方法は着目しているサブシステムがハミルトニアンで特徴付けられ，それ以外の環境と結合している開放系と考えるアプローチである[10]．電極の化学ポテンシャル差で流れる電流や温度差のある熱浴間の熱伝導等は本来この手法を取るべきであろう．もう一つは，久保が採択したようにより簡単にハミルトニアンに外力を加えて，その応答や緩和を見るというアプローチである[9]．ここでは第 2 の手法に基づき説明を加える．

第 2 の方法では $t=0$ でハミルトニアンが H から $\mathcal{H}(t) \equiv H - BF(t)$ に変化する．また $F(t)$ が微小外力であるとして，それに対する線形応答を考える．このとき，初期条件を (9) 式での (4) 式

*4) この形式的計算が可能になるためには被積分関数が複素平面の上半面で正則である必要がある．

*5) そうでない場合も変数をずらすことでほぼここでの議論はそのまま使える．

*6) この恒等式は両辺に $e^{\beta H}$ をかけて β で微分することで容易に導くことができる．

の形式解は

$$\rho(t) = U(t)\rho_{\rm eq}U^\dagger(t) \tag{24}$$

で与えられる．

ここで外力 $F(t)$ で線形化すると

$$U(t) \simeq e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\left(1 + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t d\tau H_{\rm int}(\tau)\right) \tag{25}$$

となる．ただし，$H_{\rm int}(t) = e^{-iHt/\hbar}(-BF(t))e^{iHt/\hbar}$ である．その条件下で $F(t) = F\cos\omega t$ に対する応答を考える．線形応答は $\Delta\langle A_{\mathcal{H}}(t)\rangle = \langle A_{\mathcal{H}}(t)\rangle - \langle A\rangle$ に対して

$$\Delta\langle A_{\mathcal{H}}(t)\rangle = {\rm Re}[\chi_{AB}(\omega;t)Fe^{i\omega t}] \tag{26}$$

と書ける．ただし $A_{\mathcal{H}}(t) = U^\dagger(t)AU(t)$ である．

ここで $\langle[B_{\rm H}(s), A_{\rm H}(t)]\rangle = \langle[B, A_{\rm H}(t-s)]\rangle$ と書けることと $\tau \equiv t - s$ と置くことで

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(\omega;t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau\langle B, A_{\rm H}(\tau)\rangle e^{-i\omega\tau} \\ &= \int_0^t d\tau\phi_{AB}(t)e^{-i\omega t} \end{aligned}\tag{27}$$

という関係になることが分かる．従って (23) 式で導入した $\phi_{AB}(t)$ は応答関数に他ならない．

通常の線形応答理論では $t \to \infty$ の極限を取った後，複素アドミッタンス $\chi_{AB}(\omega) = \lim_{t\to\infty}\chi_{AB}(\omega;t)$ が収束するために，無限小の散逸（収束因子）を入れるのが普通である．それは散逸なしにハミルトニアンだけに仕事を加えた際に，始状態である平衡状態の安定性が保証されていないことと関連している．しかしながらそのことは本稿の目的とは関係ないので取り敢えず無視しておこう．

また $I_{AB}(\omega) = (2/\omega)|{\rm Im}\chi_{AB}(\omega)|E_\beta(\omega)$ と書けることや，複素アドミッタンスの虚部がパワーロスと直接関係していることもすぐ分かる．従って (13) 式は**揺動散逸関係式**と呼ばれる．

ここまでくどくどと線形応答理論の再導出を書いてきたが，本稿の目的は線形応答理論をはじめとする非平衡統計力学の初歩を解説することにはなく，(13) 式のような非平衡の式が，$\phi_{AB}(t)$ の意味を問わなければ平衡統計力学と量子力学の恒等式によって導かれることを強調することにある．そこで明らかになっているのは (9) 式で特徴付けられる平衡状態の特殊性である．

5. 孤立量子系の熱化

今までの議論では最初にオブザーバブルの期待値 (2) が密度行列による期待値 (3) と一致することを出発点にし，(9) 式で与えられるカノニカルな密度行列の持つ性質を議論した．今まで (1) 式で導入した密度行列の表式では w_r を具体的に与えておかなかった．通常，混合状態では様々な状態 $|\psi_r\rangle$ を用意する必要があると思われる．しかし最近の研究では，純粋状態を用意しても統計力学を再構成できることが分かってきた[11)]．その背後には典型的な単一のミクロ状態が平衡状態を表現し得るという事実がある．このことを最近の論文[12)]に基づき，ごく簡単に紹介して本稿を締めてみよう．

第 3 節の冒頭で $|\psi\rangle$ はエネルギー E_r を持つ状態と規定したが，$E < E_r < E + \Delta E$ の間にある E_r についての状態についての区別はできないと思われる．エネルギー幅 ΔE はマクロに見れば小さなエネルギー幅だが，ミクロな状態を規定する Hilbert 空間の大きさ $D_{\rm H}$ は十分大きいと仮定する[*7)]．またミクロカノニカル的な考え方に基づけばこれらのエネルギーを持つ状態は区別がつかないので $r = 1, 2, \cdots, D_{\rm H}$ についてウェート $w_r = 1/D_{\rm H}$ をつければ良いことになる．この場合のオブザーバブル A の期待値を $\langle A\rangle_{\rm mc}$ と記せば

$$\langle A\rangle_{\rm mc} \equiv \frac{1}{D_{\rm H}}\sum_{r=1}^{D_{\rm H}}\langle\psi_r|A|\psi_r\rangle \tag{28}$$

となる．このミクロカノニカル的な期待値を用いると，系が平衡状態にあることから，ゆらぎが小さい，即ち $\Delta A \equiv A - \langle A\rangle_{\rm mc} = \epsilon$ で $\epsilon \ll 1$ が成り立つ．

*7)　これが量子力学の特徴になっている．

ここで $|\varphi\rangle \equiv \sum_{r=1}^{D_{\rm H}} \alpha_r|\psi_r\rangle$ とする．規格化条件 $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ から $\sum_{r=1}^{D_{\rm H}} |\alpha_r|^2 = 1$ であり，$D_{\rm H}$ 次元の単位球面に分布していると考えられる．このとき，単位球面上の一様測度を使って $\overline{A}$ という平均を導入しよう．このとき，$\overline{\alpha_r^*\alpha_{r'}} = \delta_{r,r'}/D_{\rm H}$ という自明な関係式を使うと

$$\begin{aligned}\overline{\langle\varphi|A|\varphi\rangle} &= \frac{1}{D_{\rm H}}\sum_{r,r'} \alpha_r^*\alpha_{r'}\langle\psi_r|A|\psi_{r'}\rangle \\ &= \frac{1}{D_{\rm H}}\sum_{r=1}^{D_{\rm H}}\langle\psi_r|A|\psi_r\rangle \\ &= \langle A\rangle_{\rm mc} \end{aligned} \tag{29}$$

である．

さらに $|X| \equiv \langle\varphi|\varDelta A^2|\varphi\rangle$ とおき，非平衡状態が実現する確率は $|X| \geq \sqrt{\epsilon}$ が出現する確率，即ち $p_{\rm neq} \equiv \Pr[|X| \geq \sqrt{\epsilon}]$ とする．このとき，非平衡状態の実現確率は

$$p_{\rm neq} \leq \frac{\langle\varDelta A^2\rangle_{\rm mc}}{\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon} \tag{30}$$

で抑えられる*8)．仮定により $\epsilon \ll 1$ なので，非平衡状態を取る確率は極めて低く，ほとんど常に平衡状態近傍に留まっていると考えてよい．

次に考えるべきは平衡状態への接近である．注目すべきは von Neumann の古典的なアイデア[13]を現代風に復活させた論文[14, 15]である．紙数が尽きたので詳細は述べることができないが，彼らは (i) エネルギー固有状態に縮退がない，即ち $r \neq r'$ であれば $E_r \neq E_{r'}$ であることと (ii) 任意の $r = 1, 2, \cdots, D_{\rm H}$ に対して $\langle\psi_r|\varDelta A^2|\psi_{r'}\rangle \ll 1$ であることを仮定した場合に必ず平衡状態に漸近することを示した．さらに最近，彼らはその平衡に近づく時間が非常に早い場合もあり得ることを示した[16]．その後も彼らは続々と興味深い研究を発表している．その点についての解説をする適任者は別にいるので，このごく最近の進展については原論文を直接読むなり，それを推進している当人の解説を読むなりしてほしい．

ここで強調したいことは，純粋状態だけを考えた散逸が一見ない孤立量子系でも平衡状態は安定な状態であり，その状態へ緩和することは間違いないことと，その緩和に要する時間は意外と短い場合もあり得る点である．平衡状態がありふれた状態であれば本稿の 3 節や 4 節で紹介した計算が生きてくる．従って大昔に完成された線形応答理論を改めて見直すことにも意味が出てくるであろう．

*8) この証明は以下の通り．特性関数を $|X| \geq \sqrt{\epsilon}$ のときに $I(|X| \geq \sqrt{\epsilon}) = 1$, $|X| \leq \sqrt{\epsilon}$ のとき，$I(|X| \geq \sqrt{\epsilon}) = 0$ としよう．従って $\sqrt{\epsilon} I(|X| \geq \sqrt{\epsilon}) \leq \sqrt{\epsilon} \leq |X|$ である．両辺の期待値を取ると

$$\sqrt{\epsilon}\,\overline{I(|X| \geq \sqrt{\epsilon})} \leq \overline{|X|} = \langle\varDelta A^2\rangle_{\rm mc}$$

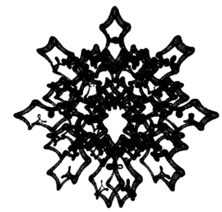
を得るが，この左辺は $\sqrt{\epsilon}\Pr[|X| \geq \sqrt{\epsilon}]$ に他ならず，両辺を $\sqrt{\epsilon}$ で割ることで (30) 式を得る．

参考文献

1) L.D. ランダウ，E.M. リフシッツ，『統計物理学　第 3 版』（小林富雄他訳），岩波書店（1980）.
2) K.G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
3) L. Brown, B. Pippard and A. Pais, *Twentieth Century Physics* (CRC press, 1995).
4) A. パイス，『神は老獪にして…：アインシュタインの人と学問』（西島和彦監訳），産業図書（1987）.
5) J.W. Gibbs, *Elementary Principle in Statistical Mechanics* (Charles Scribner's Sons, 1902).
6) M. Planck, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2**, 237 (1900).
7) M. Planck, *Treatise on Thermodynamics* (Dover, 2010); 原著初版は 1897 年.
8) 3, 4 節の内容は基本的に早川尚男，『非平衡統計力学』，サイエンス社，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ–54（2007）に基づく.
9) R. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570 (1957).
10) H-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford Univ. Press, 2002).
11) S. Sugiura and A. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 240401 (2012); ibid. **111**, 010401 (2013).
12) 田崎晴明，「量子力学を出発点にする統計力学と熱力学の基礎付け」，基礎物理学研究所 60 周年記念シンポジウムでの講演（2013）.
13) J. von Neumann, *Z. Phys.* **57**, 30 (1929);『ノイマン・コレクション　数理物理学の方法』2 章（伊東恵一編訳），筑摩書房（2013）.
14) S. Goldstein, J.L. Lebowitz, C. Mastrodonato, R. Tumulka, N. Zanghi, *Phys. Rev. E* **81**, 011109 (2009).
15) H. Tasaki, arXiv:1003.5424v4.
16) S. Goldstein, T. Hara and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 140401 (2013).

（はやかわ・ひさお，京都大学基礎物理学研究所）

量子力学
歴史・骨子・展開，そして基礎付け



谷 村 省 吾

1. 分野考

「分野」という言葉にこだわってみたい．

学問には分野というものがある．「分野」と訳される英単語として field, area や discipline があるが，field, area が「活動の場，領域」という一般的な意味で使われるのに対して，discipline は「一定の規律に従った鍛錬」というニュアンスが強い．分野があるのは学問に限った話ではなく，職業・芸能・スポーツなど，およそ人間の活動は何らかの分野に分けられる．

なぜ分野があるのかと言えば，最大の理由は，一人の人間にできることは限られているからだろう．何でもできる人というのはいなくて，それぞれ自分の得意分野を見つけて，その分野で是とされる一定の流儀に従って己を鍛錬するから discipline としての分野が成立するのだろう．

分野は大分野・小分野という階層構造を持つ．科学は人間の活動の大きな分野であり，その小分野として物理学があり，さらに枝分かれした分野の一つに量子力学が位置付けられる．

なぜこういった分野分割が可能なのかということに関しては諸説ある．分野分けは人間の都合にすぎないという極論もあるし，科学の対象となっている自然そのものに区分的階層構造が備わっているという考えもある．私は両極端の間をとって，人為が関与しなくても自然界には分野的構造が潜在しており，人の感覚･思考･行動が自然界と接することによって分野構造が顕在化してくると考えている．

自然界には原子や電子がうごめくミクロの領域がたしかにある．ただ，ミクロ世界の出来事は，人間の視覚や触覚では直接的には関知できないし，人の日常的な思考様式も通用しない．ミクロ世界の現象を論理的に理解するためには，量子力学という日常感覚からかけ離れた理論を創る必要があったし，これを修得するのに特殊な鍛錬を要する分野になったのである．

2. 量子力学をどのように学ぶか

現代では，量子力学は講義や書物を通して学ぶ科目の一つであり，多くの学生や研究者にとっては諸分野の研究を進めるために使うものだと言える．原子核物理や物性物理のように，分野そのものが量子力学のいわば「応用編」として発展してきた分野もあり，そこでは量子力学は問題を解く道具である以前に，問題を語る言葉であり，量子力学を知らないことには話にならないという一面がある．急いで付け足しておくが，物性物理を研究するのに必ず量子力学が必要なわけではない．例えば古典統計力学やソフトマターなど量子力学に依存しない分野もある．

学生が量子力学を学ぶとき，あるいは学生に量子力学を教えるとき，どのようなアプローチが適切かという問題が頭をもたげる．量子力学の学習方法を大別すれば，歴史的アプローチと論理的アプ

ローチとでも呼ぶべき2通りの方法が思い浮かぶ.

3. 歴史的アプローチ

歴史的アプローチは，量子力学が形成された順序どおりに試行錯誤の道のりを追体験する学習法である．1900年にプランクが黒体輻射(ふくしゃ)の公式を導いたときが「量子」という概念の誕生であり[1]，その後，長い時間と多くの人の手を経て「量子論」と呼ばれる理論が形をなしてきた．1925年にボルン・ハイゼンベルク・ヨルダンが決定版と言える理論を創り上げげたとき「量子力学」という呼び名も創始した[2]．これに伴い，それ以前の，いわば暫定版の量子論は「前期量子論」と呼ばれるようになった．

いまでは想像しにくいことだが，19世紀末から20世紀初頭にかけては「すべての物質は原子でできている」という考え（事実）はすべての物理学者に受け入れられていたわけではなかった．その頃確立していた物理の理論は力学・熱力学・電磁気学くらいで，統計力学は新しい分野であった．当時の物理理論であらゆる物理現象は説明できそうに思われていたが，それでも説明できない謎がいくつか残っていた．主な謎を列挙すると，1) 熱せられた物体が光を放つことは知られていたが，温度と光の強さ・色の関係を説明することができなかった．2) 物質が種類ごとに特定の波長の光を放出・吸収することは観察事実として知られていたが，そうなる理由がわからなかった．3) 物質の表面に紫外線を当てると電子が飛び出す光電効果の経験則が知られていたが，当時の理論ではそうなる理由を説明できなかった．4) 正電荷を持つ原子核の周りを負電荷を持つ電子が回っているのが原子の構造らしいことが判明したが，力学と電磁気学によればそのような原子は電磁波を放射して10^{-12} 秒程度でつぶれてしまうはずだった．

当時の物理理論はこれらの事実を説明できなかった．理論を少し修正したり，頑張って計算すれば正解に近づきそうだという類のエラーではなく，理論予測はとんでもなく的外れな答えで，考え方からして根本的に間違っているとしか思えない状況だった．

それで，これらの諸問題を解決するために量子論・量子力学が創られた．そんなふうに言うと，予定調和のサクセス・ストーリーのように聞こえるが，実際は，目に見えず指先に触れていることもわからない原子や電子というものに対して，実験で得られた手がかりと，既存の理論の何とか使えそうな部分と，あてずっぽうのような新しいアイディアとを組み合わせて，実験データに合う答えを出そうとするのだから，アイディアのつぎはぎのような理論ができていった．それが前期量子論である[3]．

人類の感覚や思考能力は生物的進化の産物だが，そのような能力が直接には通用しないミクロの世界を理解しようとして人類が新概念や理論体系を編み出した点において，量子論の構築は人類史上最高の偉業だと私は思う．ちなみに，エネルギー準位・定常状態・量子遷移・量子数といった，いまでも使われている量子論の用語はボーアが創始した概念である[2]．そういう概念を一から（ゼロから）創らなければならなかったのである．

しかし，試行錯誤の歩みをたどることは，いつまでも正解が見えてこない迷路をさまようような経験であり，学習者泣かせである．また，量子論以前の物理理論では解明できなかった問題の難しさを理解するためには電磁気学や統計力学の知識を動員しなくてはならないし[3]，前期量子論は高度な解析力学を駆使するので[4]，やはり量子論以前の理論をよく知っている必要がある．

逆に，後知恵に基づいて要領よく再構成された「いいとこどりの歴史物語」だけを学ぶと，先人の苦労が見えず，史実を誤解してしまう恐れがある．量子論の歴史的アプローチは，物理の学習コースとしても歴史の学習コースとしても徹底しにくいように思われる．

4. 論理的アプローチ

紆余曲折の足跡をたどるのが歴史的アプローチだとすると，論理的アプローチは，前提から結論に向かって無駄のないストレートな道筋をたどる

学習法である．どんな学問分野でも（学問分野に限らずとも）先人の迷いや失敗までも経験しないと学修できないとしたら，恐ろしく効率が悪いだろう．成功の秘訣を伝授し，他人の経験の要点を知識として吸収することにかけては人類は特異な能力を持っている．ここまで言うと大袈裟かもしれないが，これこそが文明を築いた力である．

例に漏れず，量子力学においても論理的アプローチが幅を利かせている．物理系の状態はヒルベルト空間のベクトル（波動関数）で表され，物理量はヒルベルト空間に作用する自己共役演算子で表される．物理量の測定値として出現し得る値は自己共役演算子の固有値として求められる．ある状態において物理量の測定値が顕在化する確率は，ボルンの確率公式で求められる．物理系の状態の時間変化はシュレーディンガー方程式を解いて求められる．以上が量子力学の骨子である．あとは実際の系を記述するのに適当なヒルベルト空間やハミルトニアンを設定して（モデルを作って）エネルギーなり確率なりを計算するのが量子力学の応用編である．

5. 分野の展開

量子力学を足がかりとして原子分子物理・物性物理・原子核物理・素粒子物理などの分野が展開していく．歴史的にそういうふうにものごとは進んだし，個人が研究を行う際も，まず量子力学を学んでから各分野を専攻することになる．

量子論自体の研究も進行していった．さしあたって完成した量子力学は原子についての理論だったが，すぐに電磁場の量子論づくりが始まった．理論だけの都合からしても，相対論と量子論とを融合する理論としては時空に横たわる場を扱う量子論が有望だと思われるし，現実の物理現象を記述・予測する目的からも，原子だけでなく電磁場も量子論で扱えなければ，原子が電磁波を出したり吸収したりする現象を量子論で扱いきれたことにならないからである．

場の量子論の顕著な特徴として，粒子が生まれたり消えたりする過程を記述し，そのような現象の確率を予測できるという点がある．普通の力学は，粒子の個数は一定不変という前提のもとに，粒子の位置の時間変化を追跡・予測するが，場の量子論は，個数が変わる粒子のシステムを記述する．光子というものは個数が決まっておらず，電子から発射されて数が増えたり，電子に吸収されて数が減ったりする．電磁場を量子論的に扱うと，電磁場の状態変化が光子の個数変化として捉えられる．

この考え方は，光子以外の他の粒子にも適用できる．場の量子論では，場が「エネルギーの高い状態」になっていることが「粒子があるという状態」であり，場が「エネルギーの一番低い状態」になっていることが「粒子がない状態，すなわち真空」なのである．この観点では，粒子は未来永劫にわたって存在するものではなく，場の束（つか）の間の状態にすぎない．

しかし，個数無制限の粒子を扱う場の量子論は，理論づくりの面で多くの困難があった．とくに日本の朝永振一郎とアメリカのファインマン，シュウィンガー，ダイソンが電子と光子の相対論的場の量子論（**量子電磁力学**）の建設に決定的な貢献をして，場の量子論は「使えるもの」になった．その後，場の量子論は電子と光子以外の粒子にも適用できるように拡張され，素粒子論に場の量子論は欠かせないものになっている．

物性物理学では，おびただしい個数（10^{23} 個とか）の電子の挙動を研究するが，そのような場合も，同種粒子の個数を無制限に扱える場の量子論は役に立つ．逆に，物性物理の超伝導の研究が「対称性の自発的破れ」のような新しい概念を場の量子論にもたらすこともある．この概念は，その後，素粒子の質量生成機構として素粒子論に組み込まれ，ヒッグス粒子の予測と発見へとつながっている．また，統計力学と場の量子論は親和性が高く，一方の研究方法は他方にも使えることが多い．

光と原子は量子論の生まれ故郷のようなものであるが，光と原子の挙動を量子論で理解できるようになったおかげで，レーザーという新しい光の状態が作り出され，**量子光学**と呼ばれる分野が開拓されている．レーザーそのものが研究対象にな

るだけでなく，他の研究の道具になったり，工学的に利用されたりもしている．例を挙げると，GPS人工衛星にも搭載されている精確な原子時計や，原子を絶対零度近くまで冷やすレーザー冷却法，Blu-ray, レーザープリンタ，光ファイバー通信などはみなレーザーの応用である．レーザーでなくても，発光ダイオードや蛍光灯も原子のエネルギー準位間の遷移によって放射される光子を利用している．さらに，原子や光の量子論的特質を情報科学的な観点から研究・利用しようと考える人も現れ，**量子暗号**や**量子コンピュータ**といった研究分野が出現している．1900年にプランクが輻射の量子論を創始し，1905年にアインシュタインが光量子（光子のことをそう呼んだ）の概念を言い始めたとき，後世に量子論がこんなにも役に立つことになるとは思ってもみなかったろう．

6. 数学との交流

量子力学の体系を数学的に整えることや量子力学の問題を解くことが，数学の研究に動機・刺激を与えることもある．

ボルンたちが創った量子力学は，行列の数学を使って原子のエネルギー準位を求める仕組みになっていた．また，シュレーディンガーの波動力学は偏微分方程式を使って同様の問題を解いた．量子力学を確固たる数学的体系に仕上げるためにフォン-ノイマンはヒルベルト空間と作用素の理論を創り上げた．ディラックのデルタ関数というアイディアを数学的に健全なものにするためにシュワルツは超函数の理論を創った．

数学の関数解析という分野は量子力学に動機付けられて発展している面がある．ハミルトン演算子の自己共役性を証明する問題や，固有値・固有関数を求める問題，束縛状態の安定性を証明する問題[5]，散乱状態を求める問題などは，それぞれ独自の数学分野として発展している．

数学者カルタンのスピノル理論は，電子のスピンの理論や相対論的量子論に取り込まれていったし，ワイルのゲージ理論は，当初は電磁場と重力

場の統一理論として考案されたものの，そのままでは物理の理論としては使えなかったが，後に弱い相互作用と強い相互作用の場の量子論に発展している．数学のファイバー束と接続の理論も，物理学のゲージ場の理論とともに発展している．群の表現論は原子のエネルギー準位の対称性の分析や素粒子の分類に欠かせないものになっているし，表現論を使って未発見の素粒子を予言することもできるようになった．

また，いわば量子論の「数学的仕上げ」として，**量子論理**や**作用素環の理論**が生まれた．観測問題を数理的に扱う**量子測定理論**も発達してきた．

こんなふうに量子論と数学との友好的・建設的な関係を示す例は枚挙に暇がない．

7. 量子論を基礎付ける

以上で量子力学の概要と量子力学に端を発する分野の展開を概観してきた．いまでは量子力学は他の分野の研究道具か，数学的問題の発生源でしかないのかというと，そうでもなく，量子力学そのものが現在進行中の研究対象でもある．とくに**量子基礎論**（foundations of quantum physics）と呼ばれる最近の研究の動向を紹介しよう．

基礎（foundation）という言葉が何を指すかという点は注意が必要だろう．基礎は初歩や入門（elementary, first course）とは違う．量子基礎論とは，一言で言えば，量子力学のよって立つところを明らかにしようとする研究分野である．量子力学はさまざまな仮定の上に成立しているが，過不足のない仮定はどれだけなのか明らかにしたい，その仮定の根拠は何なのか知りたい，量子力学と，他の物理理論，とくに古典力学との関係・共通点・相違点を明らかにしたい，また，量子力学以外の理論はあり得なかったのか考えたい，量子力学的なミクロの世界について我々はどれだけのことを知り得るのか，見落としていることはないか，あるいはミクロ世界を操ることに関して原理的な限界はあるのか．そういったことを研究するのが量子基礎論だと言ってよさそうである．

なぜそのような問題意識が生じるのかというと，現行の量子力学は，ヒルベルト空間と演算子という非常に抽象的で非経験的な概念を用いて定式化されているからである．

原子や電子は，直接見ることはできないが，どこそこにあると指示できるし，それらがあると考えるといろいろなことがうまく説明できて，その概念と理論を用いて実験装置を組み立てると予期したとおりの現象を引き起こせる例（蛍光灯やGPS）がふんだんにある．「電子という概念が便利だということと，電子が実在することは別だ」とか「電子は人間の思惟の産物であり便利な道具にすぎない」と言い張ったところで何かを得たことにはならないし，あまりにも人間の観念中心の世界観のような気がする．それよりは，人間がいなくても，人間が認識しなくても，この世界は存在し，この世界には何らかの秩序が備わっていて，その一部分を人間は知ることができると考えるほうがよほど自然だし，自然界のパーツとして生きる人間の位置付けとして正しい気がする．

しかし，原子や電子の実在性は認めたとしても，ヒルベルト空間や演算子が電子と同じレベルで実在するとは考えにくい[6)]．ヒルベルト空間やハミルトニアンは，実験室で発見されるようなものではない．どう考えても，それらは物理の本とノートと人の頭の中だけにある概念であり，現実世界で起こることを言い当てるための帳簿のようなものにすぎない．だいたい，現実世界の一つのものに対応する量子論の記号は一意的ではなく不定性がある．つまり，理論概念は現物の唯一の代替物ではない．例えば，ヒルベルト空間の状態ベクトルの位相因子をどう選んでも物理的予測は変わらないし，ハミルトン演算子に定数項を足しても物理的予測は変わらない．言い換えると，状態ベクトルは直接観測されるものではないので，不定性があってもかまわないように理論はできている．そこで，もっと直接経験的に確かめられる原理や概念から量子力学全体を構築し直すべきではないかという動機が生じる．

他の物理理論を見渡してみると，例えば熱力学

は，熱平衡状態の存在・エネルギー保存則・不可逆過程の存在という，経験的に厭というほどよく確かめられた原理から演繹推論によって組み立てられる．特殊相対性理論は，光速不変の原理と相対性原理という，確かめる手立てのある原理から導かれる．要するに，熱力学や相対性理論は，現実世界で何かを操作することによって確かめられるような原理・仮定から理論全体が構築されている．

それに対して，量子力学の出発点の仮定や概念は現実世界の何かをいじって確かめられるものではない．量子力学の正しさは，結論の正しさによってのみ検証され，仮定そのものは検証不能であるように思われる．こういう状況は不満だということで，量子力学をなるべく直接検証可能な仮定の上に作りたいという動機が生じる．

古くは1936年にフォン-ノイマンとバーコフが創めた量子論理は，ヒルベルト空間に頼らずに量子力学を定式化したいという動機から生まれた[7]．量子論理は古典論理を拡張した形式論理であり，結局，ヒルベルト空間上の射影演算子で表現される論理と同形になって，現行の量子力学を正当化しようとするものだ[8]．また，シーガルは，ヒルベルト空間の存在を仮定せず，物理量の和差積の代数とそれらの期待値だけから量子論を再構成するような C^*（シースター）代数の理論を創始した．この研究の流れは荒木・ハークの**代数的場の量子論**へと受け継がれている[9]．また，古典力学と量子力学とをより抽象度の高い**トポス**論理構造に包括しようというデーリング・アイシャムの理論がある[10]．

一方で，20世紀に勃興した新しい数学分野とも言える**情報理論**の観点から量子力学を基礎付ける試みも始まっている．パブオフスキーらはベルの不等式の破れ[11]のような量子論に特有の現象が情報理論的な原理からも導かれることを示し，注目を集めている[12]．

8. 基礎付けは必要か？

現在，量子力学の基礎的な側面が研究対象となっており，何を基礎とすべきかということについて諸説あるなどと言うと，いままで理論の拠って立つ根拠があやふやなまま量子力学を使っていたのか，と驚かれるかもしれない．しかし，物理学はそういう形でしか進歩できないものだと思う．暫定的な仮説を立てて，そこから出て来る結論が実験と合うことを確認する，さらに理論予測どおりに新現象が発見されたり，理論設計どおりにものが動くことが何度も確認されれば，帰納的に物理理論の確証度が高まる．それは，仮説を「よりもっともらしい」と思える他の仮説から演繹して妥当性を保証する作業とは別のプロセスである．

私自身の考えを述べる．熱力学の不可逆過程の原理はマクロ世界の経験則である．また，相対性理論の光速不変の原理は日常生活の中でチェックするのは難しいが，「光速不変」という言葉の意味はマクロ世界で解釈できる．そういったマクロ世界の物理理論は経験則と矛盾しないように作られるべしというリクエストなら納得できるが，マクロ世界の経験則が通用しないことが散々わかっているミクロ世界の物理理論を，わざわざマクロ世界の経験で基礎付けてやろうとするのは，逆行的とも言えるし，挑戦的とも言える．

マクロ世界の言葉でどうにか言えそうな仮説からベル不等式の破れが導けたとしても，それは初めの一歩である．一つの問題でうまくいくだけでなく，すべての問題において量子力学と同等か，それ以上によい答えを出せる理論にならないと物理の理論としては未熟だと思う．

ちなみに私は，経験・操作で確かめられそうな情報理論的原理からのアプローチよりも，物理量代数と状態の存在を認めて，そこから古典力学も量子力学も構築する代数的アプローチのほうが，理論の構成としては頼もしいと思っている[13]．

それにしても，基礎というものは，いつひっくり返るかわからないものだ．統計力学の基礎も，近年ずいぶん理解が改められ，昔の，エルゴード仮説による統計力学の基礎付けは完全にあてが外れてしまったようである（エルゴード仮説が正しかろうが間違っていようが統計力学とは何の関係もないというのが最近の専門家の見解らしい[14]）．

似たような「基礎の転覆」が量子力学でも起こるかもしれないので，注視したい．

参考文献

1) M. Planck, "On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum", *Verhandl. Dtsch. phys. Ges.* **2**, 237 (1900). 輻射のエネルギーが飛び飛びの離散的な値をとるという考えを明確に示した．原文はドイツ語だが英訳もネットで見つかる．
2) B.L. van der Waerden (editor), *Sources of Quantum Mechanics*, Dover (1968).
3) 朝永振一郎『量子力学 I』(第 2 版) みすず書房 (1969).
4) M. Born, *The Mechanics of the Atom*, G. Bell and Sons Ltd. (1927, ドイツ語版 1924). 解析力学を華麗に使いこなしており，古典力学の教科書と見まごう．ネットの Universal Library で全文無料閲覧可能．
5) W. Thirring (editor), *The Stability of Matter: From Atoms to Stars: Selecta of Elliott H. Lieb*, 3rd ed. Springer (2001). クーロン力だけを考慮した量子力学で水素原子の基底状態の存在が示されたからといって，物質一般の安定性が証明されたことにはならない．物質の安定性の数理に関する論文集．
6) 谷村省吾「波動関数は実在するか」数理科学 2013 年 12 月号，p.14.
7) M. Rédei (editor), *J. von Neumann: Selected Letters*, History of Mathematics, AMS (2005), p.59.
8) V.S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, 2nd ed. Springer (1985).
9) 荒木不二洋『量子場の数理』岩波書店 (2001).
10) A. Döring and C.J. Isham, "A topos foundation for theories of physics I-IV", *J. Math. Phys.* **49**, 053515–053518 (2008).
11) 谷村省吾「揺らぐ境界」別冊日経サイエンス No.199, 量子の逆説, p.66 (2014), 詳しい補足記事がネットにある．木村元「量子力学に現れる非局所性の意味」数理科学 2014 年 12 月号，p.36.
12) M. Pawłowski *et al.*, "Information causality as a physical principle", *Nature* **461**, 1101 (2009); G. Chiribella *et al.*, "Informational derivation of quantum theory", *Phys. Rev. A* **84**, 012311 (2011); 木村元「情報から生まれる量子力学」別冊日経サイエンス No.199，量子の逆説，p.76 (2014).
13) 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」理系への数学（現代数学社）2010 年 5 月号〜2012 年 4 月号連載；谷村省吾「量子古典対応」数理科学 2012 年 4 月号，p.19.
14) 杉田歩「量子統計力学の基礎付けについて」数理解析研究所講究録 1507 巻 147 (2006); 田崎晴明『統計力学 I』培風館 (2008) 第 4 章；S. Sugiura and A. Shimizu, "Thermal pure quantum states at finite temperature", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 240401 (2012).

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）

相対性理論

100年の時を経た，時空と重力の理論



早田　次郎

1. はじめに

相対性理論は，ほぼアインシュタイン一人によって創られました．相対性理論の帰結である時間の遅れや長さの収縮などは，SF的な雰囲気を醸し出しています．そのせいか，物理とはたいして関係のない人でもアインシュタインを知らない人は少ないでしょう．それくらい相対性理論は有名であり，誰もがそれがどんな理論なのか知りたいと思っているはずです．でも，中学や高校で教えてはくれません．私が大学生の頃は，大学でさえも，まじめに教えられてはいなかったと記憶しています．そうなった第一の理由は，難しいからというよりは，物理学の中でさえ，実学とはほど遠い不必要なものであると多くの物理学者に認識されていたからだと思います．ところが，今や**グローバル・ポジショニング・システム（GPS）技術**にとって相対性理論は不可欠であり，誰も不必要だなどと言うことはできなくなりました．さらに，そういう実用性とは別に，宇宙物理，素粒子，原子核，物性理論の研究者にとって，一般相対性理論は必須の学問になりつつあります．これからは，大学の講義科目としても定着していくことでしょう．

奇しくも，2015年は，アインシュタインが一般相対性理論を発見してちょうど100年にあたります．世界中で様々な記念行事が開催される予定です．その一般相対性理論の最大の予言は重力波と呼ばれる時空のさざ波の存在ですが，実は予言から100年経った今でも重力波の直接観測はなされていません．しかし，観測技術の進歩によって，ここ数年以内に重力波が直接観測されるというところまできています．もしかしたら，2015年は大発見の年になるかもしれません．

2. 特殊相対性理論

相対性理論は，特殊相対性理論[1)]と一般相対性理論[2)]の総称として使われています．両者は質的に違うので，これはあまりよい名前ではありませんが，歴史的な経緯があるのでそれに従うことにします．まず，ここでは特殊相対性理論の説明をしようと思います．

1905年に，アインシュタインが提唱した特殊相対性理論は，**相対性原理**と**光速の不変性**という2つの仮説を基礎としています．

ニュートン力学では，何の力も受けない物体が等速直線運動をするような系，すなわち慣性系が重要な役割を果たします．そのような慣性系は無限にあって互いに**ガリレイ変換**

$$t' = t\,, \quad x' = x - vt\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z$$

で結びついています．ここで，v は，x 軸方向に相対運動している2つの慣性系の間の相対速度です．これらすべての観測者にとって，物理法則は完全に同じになるというのが相対性原理です．一方で，電磁気学では，電磁波（光も含まれる）は波

動方程式に従うことがわかっています．例えば，c を光速として，真空中で電場 $\boldsymbol{E}$ は，波動方程式

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right]\boldsymbol{E}=0$$

を満たします．ここで光速が慣性系によらず一定の値 $c=3\times10^8\ \mathrm{m/s}$ である（光速の不変性）と仮定すると，波動方程式は，ガリレイ変換の下で不変な方程式ではありません．言い換えると，マックスウェルの電磁気理論とニュートンの力学法則は互いに矛盾します．アインシュタインは，

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$y'=y\ ,\quad z'=z$$

のような，時間と空間が混じり合うような変換（**ローレンツ変換**）の下で不変になるように，ニュートンの運動方程式を変更することでこの矛盾を解決しました．ガリレイ変換は，物体の速さが光速より遅いときのローレンツ変換の近似的な表式に他ならなかったのです．

さらに，ミンコフスキーは，ローレンツ変換の幾何学的な解釈を与え，

$$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2$$

という計量で与えられる**ミンコフスキー時空**を発見しました．素粒子を記述する場の量子論は，この特殊相対性理論を基礎にしています．

忘れてはいけないことは，特殊相対性理論がニュートンやガリレイの力学を書き換えたように，特殊相対性理論もまた，何らかの新しい理論の一部として吸収されてしまう可能性があるということです．実際，宇宙線観測において，ローレンツ不変性がどのエネルギースケールまで成り立っているのかという論争が盛んになされてきました．

3. ニュートンの重力理論の問題点

高校の物理で習うように，互いに r の距離にある質量 M と m を持つ 2 つの物体の間には，万有引力

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-m\nabla\phi$$

がはたらきます．G はニュートンの重力定数です．ここに現れる重力ポテンシャル ϕ は，ポアッソン方程式

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho\ ,\quad M=\int\rho\,d^3x$$

を満たします．ここで，ρ は物質の質量密度です．質量 m の質点に対するニュートンの運動方程式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-m\nabla\phi$$

です．

ここで問題なのは，ニュートンの万有引力は遠隔相互作用であって，特殊相対性理論の因果律を破ってしまうということです．大学で，ほぼ同時に学ぶ電磁気学でも，クーロン力という瞬時に伝わる遠隔相互作用が出てきて，一見，特殊相対性理論と矛盾します．しかし，電磁場を導入し，マックスウェル方程式を考えることでこの問題は解決することもすぐに学ぶわけです．ニュートンの万有引力は，電磁気学のクーロン力と似ていますから，電磁場に対応して重力場を導入すればよいということはすぐに思いつきます．では，マックスウェル方程式に対応するものはどうやって導けばよいのでしょうか？ ヒントは重力が局所的には消せるという事実にあります（**等価原理**）．これは，一様な重力 $F=-mg$ が

$$x'=x-\frac{1}{2}gt^2$$

と変換することで消すことができること，そして，任意の重力場は局所的には一様な重力場とみなすことができることからわかります．ただし，異なる 2 点における重力の差である潮汐力のような非局所的な力は消すことができません．このことは重力場がある場合には大域的な慣性系が存在しないということと密接に関係しています．局所的には重力は消せるので，局所的な慣性系は存在します．アインシュタインは重力が持つこのような性質が，曲がった空間の持つ性質と類似していることに気づきました．つまり，局所的に重力が消せ

るということは，どんなに曲がっていても局所的には平坦であるということに，非局所的な潮汐力は消せないということは，曲率は決して消すことができないことに，そっくりなのです．この類似性を押し進めることで，つくりあげられたのが**一般相対性理論**でした．

4. 一般相対性理論

ミンコフスキー時空は物理的には慣性系に対応しています．一方で，重力が存在すると大域的な慣性系は存在しないことがわかっています．重力は，曲がった時空

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

によって記述されるのです．ここで，計量 $g_{\mu\nu}$ は，時空点の関数です．どんな曲がった時空も局所的にはミンコフスキー時空なので，局所慣性系は存在します．

等価原理によると，重力以外の力がはたらかないとき，物体は時空の最短距離を“まっすぐ”進みます．これは，**測地線方程式**

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0$$

によって記述されます．ここで，接続係数は

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\left(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}\right)$$

のように，計量とその微分を使って表されています．添字のカンマは座標 x^μ に関する微分を表しています．ニュートン的な場合，すなわち，計量がほとんど平坦に近く $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，$h_{\mu\nu} \ll 1$，物体の速度が光速に比べて十分遅い場合には，測地線方程式は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\nabla^i\phi$$

のようにニュートン方程式に帰着します．ただし，$h_{00} = -2\phi/c^2$ としています．惑星の運動はこの曲がった時空の測地線を描いていることになります．惑星の運動は3次元空間でみると楕円運動でえらく曲がっているように見えますが，時間軸を加えた4次元時空の中では，ほぼ直線運動をしています．これは，時間軸には光速がかかっているせいです．

では，時空の曲がり方，すなわち計量は何が決めるのでしょう？ それが，**アインシュタイン方程式**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

です．左辺に現れているのはリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率 R で，リーマン曲率テンソル

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\rho,\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\rho} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}$$

から，$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ や $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ のように縮約することで得られます．右辺に現れている量は，エネルギー運動量テンソルで，物質のエネルギー密度や運動量密度などを表しています．このように，時空の曲がり方は，物質のエネルギーや運動量によって決まるのです．ニュートン的な場合には，アインシュタイン方程式は，ポアッソン方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

になります．

何とうまくできているのでしょう．物質が時空を曲げ，その曲がった時空を“まっすぐ”進むことが，重力だったのです．特殊相対性理論とこうもうまくつながっていて，それを一人の科学者がすべて発見したというのは本当に信じがたいことです．

5. 実験による検証

物理の理論である以上，実験によって検証されなければ意味がないということは言うまでもないことです．ニュートンの重力ポテンシャルが比較的に小さな状況，すなわち，典型的な距離を r，質量を M として，

$$\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$$

となる場合には，一般相対性理論の実験的な検証はかなり良い精度で行われています．このとき使われるのが，パラメトライズド・ポスト・ニュー

トン（PPN）形式です．静的球対称な場合には，アインシュタインの理論からのずれは

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{c^2 r} - 2\beta\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2,$$
$$g_{ij} = \left(1 + \gamma\frac{2GM}{c^2 r}\right)\delta_{ij}$$

のように2つのPPNパラメータ β と γ で表されます．アインシュタイン方程式を解けば計量は決まるのですが，PPN形式は，一般相対性理論ではない場合にまで拡げて考察するような枠組みを与えています．一般相対性理論が正しければ $\beta = 1$ と $\gamma = 1$ になります．測地線方程式を解くと，惑星運動の**近日点移動**は

$$\Delta\phi = \frac{2 + 2\gamma - \beta}{3}\frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

のように β と γ の両方に依存していることが分かります．ここで，a は軌道の長半径，e は離心率です．一方，光が重い物体のそばを通るときの**光線の湾曲**は，b を衝突径数として

$$\Delta\phi = (1 + \gamma)\frac{2GM}{c^2 b}$$

となります．これは γ にのみ依存していることに注意してください．同様に，重力場中の電磁波の伝搬時間の遅れである**シャピロ時間遅延**は

$$\Delta t = (1 + \gamma)\frac{2GM}{c^3 r}\log\left(\frac{4r_1 r_2}{d^2}\right)$$

と計算できます．ただし，d は光線と原点の距離，r_1 , r_2 は，原点から光を受け渡し合うそれぞれの物体までの距離です．土星探査機カッシーニを使ったシャピロ時間遅延の観測からは

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$$

ということがわかっています．クゥエーサーや電波銀河を用いた，最近の光線の湾曲観測からは

$$\gamma - 1 = (-1.7 \pm 4.5) \times 10^{-4}$$

という制限が得られています．近日点移動に関しては，太陽の扁平度を正確に見積もる必要がありますが，最近の観測と γ に関するカッシーニの結果を使って

$$\beta - 1 = (-4.1 \pm 7.8) \times 10^{-5}$$

という結果が得られています．これらの結果はどれもアインシュタイン理論が正しいことを示唆しているようです[3)]．

PPN形式でわかることは，ニュートン近似が良い場合には一般相対性理論が正しそうだということです．アインシュタインの重力理論の決定的な証拠を見つけるには，重力波を観測する必要があります．ミンコフスキーからのずれを，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とすると，真空中では

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right]h_{\mu\nu} = 0$$

という波動方程式がアインシュタイン方程式から導かれます．重力波の存在は，連星パルサーPSR B1913+16の公転周期の変化を観測することで間接的に証明されていて，その功績により，ハルスとテイラーには1983年度のノーベル賞が与えられました．しかし，重力波を観測したと言い切るには直接時空の歪みを観測しなければなりません．

地上で期待される重力波の振幅は，典型的には $h_{\mu\nu} \sim 10^{-22}$ くらいで，これまでは直接観測は非常に困難でした．現在，アメリカのLIGO，日本のKAGRAなどの干渉計型重力波検出器による重力波直接観測が現実的になっています．重力波の直接観測に成功すれば，それ自体がノーベル賞級の発見です．しかし，その先には重力波天文学が待っています．電磁波観測やニュートリノ観測と合わせて，多様な観測によってミクロとマクロの様々な謎が解き明かされることでしょう．待ち遠しい限りです．

6. 宇宙観測と修正重力理論

これまでに述べてきたように，相対性理論は革新的であり，美しい理論体系をなしているのみならず，実験的にもかなりの精度で検証されて来た物理学の理論であり，今や多くの大学でカリキュラムの一部として組み込まれてきています．この

ような理論に修正を加える必要があるのでしょうか？ これがこの節の話題です．

実は，ニュートンの万有引力ですら修正を受ける可能性があります．万有引力は太陽系の惑星運動の観測から発見されたわけですが，それを超えるような，例えば銀河系のスケールで本当に万有引力が成立しているのでしょうか？ これは，ダークマターの問題と関係があり，今も真剣に研究されています．0.1 mm 以下の小さなスケールでは，万有引力の検証はもっと困難な仕事になります．こちらは，余剰次元の存在と密接に関係しています．新しいアイデアによる精度の良い実験が待たれます．

一般相対性理論を修正しようという最も大きな動機は宇宙の精密観測からきています．まず，アインシュタインの一般相対性理論で宇宙がどのように記述されるかを簡単に紹介しておきましょう．宇宙を記述する時空の計量は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

と表されます．ミンコフスキー時空との違いは，ハッブルの法則から帰結されるように空間が一様に膨張しているという点だけです．この膨張を表すスケール因子 $a(t)$ の関数形は，アインシュタイン方程式から導かれる**フリードマン方程式**

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

で決まります．

物質の基礎法則を研究する分野は素粒子物理学であり，大変な成功を収めました．ところが，宇宙には標準的な素粒子物理学の枠組みでは説明できないダークマターが存在することが天文学的な観測から知られています．さらに，最近，宇宙論的な距離にある Ia 型超新星の観測から，ダークエネルギーと呼ばれる未知のエネルギーが存在することもわかってきたのです．この功績に対して，パールムッター，シュミット，リースに 2011 年のノーベル賞が与えられました[4)]．

ダークエネルギーが存在するという結論の背後には一般相対性理論から導かれるフリードマン方程式が正しいという仮定があります．実際にわかっ

ていることは宇宙が加速膨張をしていることであり，フリードマン方程式が正しいとすれば，通常の物質とは違う状態方程式を満たすようなダークエネルギーがなくてはならないという論理なのです．しかし，宇宙論的なスケールで一般相対性理論が正しいとする実験的な根拠は乏しいのです．ならば，一般相対性理論が宇宙論的なスケールで修正を受けるのではないかと考える人がいても不思議ではありません．これが修正重力理論です．それが具体的にどのようなものであるか，一つだけ例をあげるならば

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int f(R) d^4x$$

です．アインシュタインの一般相対性理論は $f(R) = R$ に対応します．ここで，例えばパラメータ n, μ, c_1, c_2 を適当にとって，$f(R) = R - \mu^2 c_1 (R/\mu^2)^n / (c_2 (R/\mu^2)^n + 1)$ というスカラー曲率の関数を選ぶと，太陽系の観測と矛盾せず，なおかつ加速膨張宇宙を説明することができます[5)]．この関数形は，基礎原理から自然に出てくるようなものとは思えませんが，ダークエネルギーの存在を認めることに比べてどちらがましかと聞かれると，「うーん」とうなってしまいます．もちろん，これ以外にも修正重力理論は無限に存在します．無数に存在する理論のどれが本当なのか，あるいはどれも間違いで，何か根本的な進展が待っているのか，それは分かりません．一つだけ，確実に言えることは，相対性理論が，現在の物理の最大の謎を解く鍵をにぎっているということです．

7. 量子重力，そして他分野への拡がり

相対性理論は，物理学理論の舞台である時空という概念を生み出し，重力の本質を捉えることに成功しました．その理論体系は宇宙の進化を記述するために不可欠なだけではなく，初期宇宙の研究を通して素粒子物理学との深い関わりを見出してきました．重い星の内部の相対論研究は，原子核理論や量子色力学との結びつきを深めています．ベケンシュタインやホーキングに始まるブラックホールの熱力学の研究は，我々が重力の本質的な理解には到達していないことを示唆しています．相対性理論の量子力学的な拡張理論として最も有望だと思われている超弦理論を使ったブラックホールの研究はさらに多くの謎を生み出してきました．

その中でも特筆すべき発展が **AdS/CFT** 対応の発見です[6)]．これは重力理論と重力を含まない理論が等価であることを主張しています．驚くべきことに，重力理論にとって本質的であろうと思われる次元さえもが，対応する両方の理論では違うのです．この対応を使えば，重力を含まない場の量子論によって量子重力理論を構成できる可能性さえあります．逆に，場の量子論の非摂動的な問題が重力理論の古典的な解析で明らかになるのです．特に，後者の観点は最近大きな発展を遂げました．量子色力学（QCD），流体力学，凝縮系の物理が，アインシュタインの重力理論によって解析可能なことがわかってきたのです．例えば，超伝導の場合，反ドジッターブラックホール上での電磁場と電荷を帯びたスカラー場を考えると，AdS/CFT 対応によって，場の量子論側では，計量がエネルギー運動量テンソル，電磁ポテンシャルが電流，スカラー場が秩序パラメータに対応します．このような対応の下，ブラックホールの不安定性に伴う動力学的遷移が，超伝導相転移に対応するという興味深い事実が明らかになりました．また，場の量子論の量子縺れの度合いを表すエンタングルメントエントロピーが，古典的な反ドジッター時空上の極小曲面の面積の計算に帰着されることもわかってきました[7)]．

8. 新たな展開

相対性理論は他の分野と違って，ある意味で異端でした．100 年もの間，重力波の存在が実験的に証明されていないことが象徴するように，机上の学問であり，長い間，物理学科においてさえ必須の科目だとは見なされてこなかったのです．それが今では GPS の基礎を支え，物理学の様々な分野との深い関係が明らかになりつつあります．実

験的には，いつ「重力波が直接観測された」という大ニュースが世界中を駆け巡ってもおかしくない状況にあります．

さらに，最近のBICEP2による観測結果が新たな展開を示唆しているように見えます．BICEP2グループは，宇宙背景放射の偏光を測定することで，量子論的な起源を持つ**原始重力波**を間接的に捉えたかもしれないのです[8)]．彼らが観測したのは，偏光のBモードで，観測しているスケールでは原始重力波しかこの偏光をつくることができないこともわかっています．もちろん，これが原始重力波の観測であると確信するには，様々な観測ノイズの同定を行う必要があり，現在も世界中で検証が行われているところです．仮に，この観測が原始重力波の観測を意味することが確定したならば，量子重力理論への道が開けることになります．これは画期的な発見となり，物理学に革命をもたらすでしょう．

アインシュタインは，ブラウン運動，光電効果，相対性理論などの研究によって現代物理学の発展に寄与しました．物理学全体に影響を与えたわけです．興味深いことに，アインシュタインの最大の発見である一般相対性理論自身が，100年後の今，物理学全体に影響を与えようとしているのです．その全容は未だ明らかではないのですが，最先端の研究分野として多くの研究者を惹きつけています．

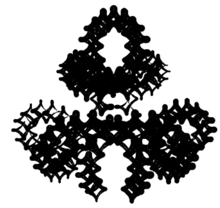
参考文献

1) A. Einstein, *Annalen Phys.* **17**, 891 (1905) [*Annalen Phys.* **14**, 194 (2005)].
2) A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (*Math. Phys.*) **1915**, 844 (1915).
3) C.M. Will, *Living Rev. Rel.* **17**, 4 (2014).
4) http://www.nobelprize.org
5) W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007) [arXiv:0705.1158 [astro-ph]].
6) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].
7) S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].
8) P.A.R. Ade *et al.* [BICEP2 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **112**, 241101 (2014).

（そうだ・じろう，神戸大学大学院理学研究科）

物性物理学

物質に潜む普遍的概念



押川　正毅

1. 物性物理学とは

高校生や大学生，また一般の方々の多くにとって，「物理」と聞いてまず思い浮かぶ研究対象は素粒子や宇宙のようである．一方，物理学の研究対象は森羅万象であるとも言え，そのなかでも「物性物理学」は物理学の研究の現場で大きな比重を占めている．物性物理学とは，「物質の性質」を研究対象とする物理学である．「物質」と言うと，物理よりも化学というイメージを持つ人が多いかもしれない．実際，「物質」はまさに化学の研究対象でもある．化学と物性物理学の違いは，一言で言えば，化学ではそれぞれの物質の個性を追求するのに対し，物性物理学では多くの物質に共通して現れる**普遍的**な性質や，それが現れる機構が主要な興味の対象となる．とは言っても，もちろんこれらは厳密に区別できるものでもなく，またその必要もない．研究の現場では，例えば化学者が合成した試料を物性実験家が測定し，物性理論家がその結果について理論的に検討を行う，などの協力がしばしば行われている．

物質は原子や分子が集まって作られる．原理的にはいくらでも大きな物質を考えることもできるが，物性物理学における実際の実験では，多くの場合例えば数ミリメートルからセンチメートルの大きさの試料を用いることが多い．これでも，アボカドロ数程度の非常に多くの原子を含むため，物質の性質としては，より大きな物質とほぼ変わらないとして良いことがほとんどである．一方，最近では，微細加工技術の進展に伴って，ナノメートルスケールの人工的な構造も作られるようになっており，このような構造を持つ物質の性質も興味深い問題である．従って，大きさのスケールで言えば，原子のサイズ 1 Å（オングストローム）$=0.1\,\mathrm{nm} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ 程度から，1 cm 程度が物性物理学の主な研究対象である．

これに対し，より小さいスケールを研究対象とする物理学として原子核物理学や素粒子物理学，逆により大きなスケールを研究対象とする地球物理学や天体物理学，宇宙物理学などがある．このように，対象とするスケールによって物理学の分類を行うことができるが，これらは互いに隔絶したものではない．

多くの物質に共通して現れる，普遍的な現象が物性物理学の興味の対象であるように，全く異なるスケールでも共通する現象や機構が現れるのである．これは，全く異なるスケールの現象が共通する数学によって現象を記述できるためである．特に，時空に分布した無限自由度の系を扱う「**場の理論**」はいわば物理学の共通言語として，異なるスケールにおける多くの現象を統一的に記述するのに役立っている．

この顕著な例として，超伝導における対称性の自発的破れをヒントにして，素粒子物理に対称性の自発的破れの概念を導入した南部陽一郎の研究[1)]がある．また，逆に，素粒子物理で培われた概念や場の理論の技法を物性物理学に応用することも盛んに行われている．このように，場の理論が典型的な例であるが，物性物理学に現れる理論や概念は，必ずしも物性物理学に限らない普遍的な要素を含むことが多い．一方で，当然ではあるが，物性物理学を理解するには，その基礎となる概念をまず知る必要がある．

物性物理学の研究対象となる「物質」は多彩であるが，大きくは 2 通りに分類することができる．固体では，原子の位置はほぼ固定されており，原子の運動に関しては，平衡位置の周囲での振動，すなわち音波に限定して考えることができる．このような系では，電子の振舞いによって決定される，電気伝導や磁性などの性質が主要な興味の対象となることが多い．これが物

性物理学における伝統的な分野である，固体物理である．これに対して，高分子などの系では，原子の相互の位置が固定されておらず，その変化が主要な興味の対象となることが多い．このような系をソフトマターと呼ぶことがある．最近では，ソフトマターの物理もその重要性を増しているが，以下では紙数の制限（と筆者の守備範囲）もあり，主に固体物理における基礎的な概念について論じることとする．詳細は例えば文献 2) を参照されたい．

2. 格子振動と音波

固体の簡単な模型として，d 次元の単純（超）立方格子を考えよう．この立方格子の 1 辺の長さを L とし，周期的境界条件を課す．単位胞の 1 辺の長さを a とすると，格子点の座標は $(an_1, an_2, \ldots, an_d)$ である（n_i は $0 \leq n_i < L/a$ を満たす整数）．原子はそれぞれの格子点に存在するものとするが，その周囲での微小な変位（位置の変化）も考える．$\Phi(\vec{r})$ を格子点 $\vec{r}$ にある原子の変位としよう．d 次元空間における原子の変位は，本来は d 次元のベクトルとして考えなくてはならないが，正確な議論は教科書に譲り，ここでは変位をスカラーとして簡単化した模型を考える．

ある原子が変位すると，周囲の原子との相互作用によりエネルギーが増加する．周囲の原子との相互作用エネルギーは相対位置によって決まるので，変位についてもエネルギーは相対的な変位のみの関数として書けるはずである．簡単のため，隣接する（最近接の格子点にある）原子間の相互作用のみを考え，また微小な変位の 2 次までを取り入れる．すると，変位に関するハミルトニアンは

$$H = \sum_{\vec{r}} \frac{(\Pi(\vec{r}))^2}{2m} + \frac{K}{2} \sum_{\vec{r}} \sum_{i=1}^{d} (\Phi(\vec{r} + a\hat{x}_i) - \Phi(\vec{r}))^2 \tag{1}$$

となる．ただし，m は原子の質量，$\Pi(\vec{r})$ は格子点 $\vec{r}$ にある原子の運動量，$\hat{x}_i$ は i 方向の単位ベクトルである．ある原子は隣の原子と，隣の原子はさらにその隣の原子と相互作用しているので，どの原子も格子上の他のすべての原子と間接的に相互作用している．ハミルトニアンから導かれる運動方程式は

$$m\frac{d^2\Phi(\vec{r})}{dt^2} = -K \sum_{i} (\Phi(\vec{r} + a\hat{x}_i) - \Phi(\vec{r})) \tag{2}$$

となる．これは格子上の波動を表すので，解として $\Phi(\vec{r}) = \Phi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ の形を仮定してみると，確かに定数 $A_{\vec{k}}$ について

$$\Phi_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}} e^{\pm i\omega_{\vec{k}} t} \tag{3}$$

は運動方程式の解になっていることがわかる．ここで，境界条件より波数 $\vec{k}$ の各成分は k_j は $2\pi/L$ の整数倍であり，また $0 \leq k_j < 2\pi/a$ を満たす．また，振動数 $\omega_{\vec{k}}$ は波数 $\vec{k}$ の関数として

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{2\frac{K}{m}\sum_{i}(1 - \cos(k_i a))} \tag{4}$$

で与えられる．このような，振動数と波数との関係を分散関係と呼ぶ．特に波数が小さい（$k_i a \ll 1$）領域では，

$$\omega_{\vec{k}} \sim \sqrt{\frac{K}{m}} |\vec{k}| a \tag{5}$$

と，波数の大きさに比例した振動数となる．

運動方程式は線形なので，その解の任意の**重ね合わせ**（線形結合）もまた解となっている．ここでは証明は省略するが，運動方程式に関する任意の初期条件を，上述の解 (3) の重ね合わせで表現できる．従って，すべての解が (3) の重ね合わせで与えられることになる．このような意味で，解 (3) を**基準振動**と呼ぶ．それぞれの基準振動は格子全体に広がっているので，運動方程式の解は原子の振動が波として格子全体に伝播することを表している．例えば，時刻 0 に一つの原子のみを変位させたとき，これを初期条件として基準振動の重ね合わせで表すと，すべての $\vec{k}$ に関する基準振動が寄与し，時間の経過に従って変位はすべての原子に伝わっていくことがわかる．このような波動は，音波と呼ばれる．

3. フォノン

ここまでは，原子の運動を古典的な（=量子力学的でない）ものとして考えていたが，量子力学でも運動方程式は全く同じ形をとるので，同様の議論が可能である．ただし，もちろん現象としては量子力学は古典力学にはないものを与える．例えば，古典力学ではこの模型の基底状態ではすべての原子の変位がゼロ（$\Phi(\vec{r}) = 0$）である．しかし，量子力学では位置と運動量の不確定性関係によってこのような状態のエネルギーは高くなってしまう．量子力学的な模型の基底状態では，基底状

態においても原子の変位がゼロではなく，ゆらぎを持っている．これは**ゼロ点振動**と呼ばれるが，より広く，**量子ゆらぎ**と呼ばれるものの一例でもある．ゼロ点振動は，単一の**調和振動子**についても存在する．本記事で考えている固体の模型は，多くの調和振動子の集まりとみなすこともできる．それぞれの調和振動子についてゼロ点振動が存在するので，各原子の変位についてもゼロ点振動が存在することになる．

単一の調和振動子を量子力学で解く際には，**昇降演算子**を導入するのが便利であった．我々の模型についても，同様に，それぞれの基準振動について昇降演算子を導入するのが便利である．すなわち，まず $\Phi_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{r}}\Phi(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\Pi_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{r}}\Pi(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$, と基準振動モードを定義する．ただし，$N=(L/a)^d$ は格子点の数である．ここで，

$$a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_{\vec{k}}}{\hbar}}\Phi_{\vec{k}} + \mathrm{i}\frac{\Pi_{\vec{k}}}{\sqrt{m\omega_{\vec{k}}\hbar}}\right), \tag{6}$$

$$a^\dagger_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega_{\vec{k}}}{\hbar}}\Phi_{-\vec{k}} - \mathrm{i}\frac{\Pi_{-\vec{k}}}{\sqrt{m\omega_{\vec{k}}\hbar}}\right) \tag{7}$$

と定義すると，これらは交換関係

$$[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \tag{8}$$

を満たす．ただし，$\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ は $\vec{k}=\vec{k}'$ のとき 1 で，それ以外の場合はゼロである．さらに，他の $a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}$ どうしの交換関係はすべてゼロとなる．これらの昇降演算子を用いてハミルトニアンは

$$H = \sum_{\vec{k}}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

と書ける．これによって，我々の模型が，波数 $\vec{k}$ でラベルされる独立な調和振動子の集まりであることが量子力学的にも定式化された．

量子力学的な調和振動子の解法に登場する昇降演算子であるが，これは以下のように，**ボース粒子**の**生成消滅演算子**と解釈することもできる．古典物理では，複数の粒子があれば，それらがいくら似ていても原理的には区別できるものと考えられていた．それに対し，量子力学では原理的にも区別がつかない同種粒子が存在すると考えられている．一般の次元では，同種粒子はボース粒子と**フェルミ粒子**に分類できる．ボース粒子は，2 つの同種粒子の交換に対して波動関数が不変（対称）であるような粒子であり，フェルミ粒子は同様の交換に対して波動関数の符号が反転する（反対称）ような粒子である．どちらの場合も同種粒子の区別がつかないので，ある一つの（単一粒子の）状態に着目すれば，その状態を占める粒子の個数のみによって多粒子系の状態が表示できる．調和振動子の昇降演算子は，交換関係 $[a, a^\dagger]=1$ を満たす．このとき，$n=a^\dagger a$ を定義すると，n の固有値は 0 以上の整数であり，また上記から交換関係 $[n,a]=-a$ および $[n,a^\dagger]=a^\dagger$ が導かれる．このことは，$n=a^\dagger a$ をボース粒子の個数演算子，a を消滅演算子，$a^\dagger$ を生成演算子と解釈できることを示している．我々の模型の議論に戻ると，単一のボース粒子の状態が波数 $\vec{k}$ で指定できると考え，このそれぞれの状態に対応してボース粒子の生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}}$ が定義されていると考えることができる．また上記と同様に，それぞれの波数についてボース粒子の個数演算子も $n_{\vec{k}} = a^\dagger_{\vec{k}}a_{\vec{k}}$ と定義できる．

このように，音波を量子力学的に考えると，ボース粒子の集まりとして記述できることがわかった．このボース粒子を「**フォノン**」と呼ぶ．これは，電磁波を量子力学的に考えると**光子**（フォトン）の集まりとして記述できることと似ている．音波，あるいはフォノンの理論は，場の理論（場の量子論）の簡単な例でもある．フォノンと光子はどちらもボース粒子であり，類似点も多いが，もちろん異なる点もある．概念的には，光子は（少なくとも現在のところ）素粒子であると考えられている．これに対し，フォノンは素粒子ではなく，多くの原子の集団運動を表すものである．もともと，原子は素粒子が複合してできたものであるが，物性を理解するには，原子個々の運動ではなくて，多くの原子が集団として示す運動が重要になることが多い．興味深いことに，このような集団運動を量子力学的に考えると，フォノンのような「粒子」が現れることが多い．このような「粒子」は，物質のような多粒子系における励起の最小単位という意味で，**素励起**と呼ばれる．フォノンも素励起の一種であるが，物性物理学の理解にはこのような素励起の理解が重要になることが多い．一方，光子は素粒子であり，この点では物性物理学における素励起とは全く違うもののように思える．しかし，現代的な素粒子物理の観点からはこれらはそれほど異なるものでもない．もともと真空とは何もない空間と考えられていたが，現代的な（場の理論的な）考え方では，真空は無限に多くの自由度を持つ複雑なもので，「素粒子」はまさに物性物理学における素励起と同様の存在である．

さて，これらから，実験的に観測可能な量について

どのようなことが言えるだろうか？ もちろん多くのことがあるが，ここでは簡単のため**比熱**を考えよう．固有振動数 ω を持つ調和振動子のエネルギー期待値は，

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega(n+\frac{1}{2})e^{-\beta\hbar\omega}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega}} = \hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}+\frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

である．ただし，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ は逆温度である．従って，この調和振動子の比熱は

$$C_\omega = \frac{dE_\omega}{dT} = -\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{dE_\omega}{d\beta} = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{(\hbar\omega)^2 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2} \tag{11}$$

である．我々の模型では，十分低い温度では低エネルギーのフォノンのみを考えればよいので分散関係を線形近似して $\omega \sim v|\vec{k}|$ とする．すべての調和振動子からの寄与を合計すると，体積あたりの比熱は

$$c = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{(\hbar v|\vec{k}|)^2 e^{\beta\hbar v|\vec{k}|}}{(e^{\beta\hbar v|\vec{k}|}-1)^2} \propto T^d \int_0^\infty d\tilde{k}\,\tilde{k}^{d+1}\frac{e^{\tilde{k}}}{(e^{\tilde{k}}-1)^2} \tag{12}$$

となる．ただし，波数空間の体積 $(2\pi/L)^d$ あたり一つの波数が存在するので，L の大きい極限で $L^{-d}\sum_{\vec{k}} \sim \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}$ と和を積分で置き換えられることを用いた．また，$\tilde{k} = \beta\hbar v|\vec{k}|$ と定義し，二行目では温度によらない定数の係数は省略した．$\tilde{k}$ に関する積分は収束して，温度によらない定数を与える．従って，比熱の温度依存性は，系の次元 d により異なり T^d に比例することになる．特に 3 次元では T^3 に比例する．前述のように，我々の模型は様々な簡略化を経ており，現実の物質を忠実にモデル化したものではない．しかし，格子振動（フォノン）による比熱の低温での温度依存性は，これで正しく与えられることが知られている．これは，場の理論や，多くの自由度を含む系について成立する**普遍性**（ユニバーサリティー）の一例である．

4. 電子とバンド構造

電気伝導など，物質の重要な性質を主に支配するのは電子の運動である．そこで，先ほどのように非常に簡単化した d 次元（超）立方格子上の模型で固体中の電子状態を考えよう．まず，実際の電子はスピン自由度を持つが，ここではスピン自由度を無視することにする．各電子は，格子点に存在する原子のどれか一つに存在できるものと仮定し，原子内部での異なる軌道などの自由度は無視する．また，ある原子に存在する電子は，隣接する原子に飛び移ることができるとする．このような模型のハミルトニアンは，電子の生成消滅演算子 $c, c^\dagger$ を用いて以下のように書くことができる．

$$H_{\mathrm{e}} = -t\sum_{\vec{r}}\sum_{i}\left[c^\dagger(\vec{r}+a\hat{x}_i)c(\vec{r}) + \mathrm{h.c.}\right] - \mu\sum_{\vec{r}} c^\dagger(\vec{r})c(\vec{r}). \tag{13}$$

ここで，t は飛び移りの強さを表すパラメータ，μ は化学ポテンシャルである．また，$c, c^\dagger$ は反交換関係

$$\{c(\vec{r}), c^\dagger(\vec{r'})\} = c(\vec{r})c^\dagger(\vec{r'}) + c^\dagger(\vec{r'})c(\vec{r}) = \delta_{\vec{r},\vec{r'}} \tag{14}$$

を満たし，また $c, c^\dagger$ の他の反交換子はすべてゼロである．この模型も，前節までのフォノンの模型と同様に基準振動に対応するモードを用いることで解くことができる．すなわち，

$$c_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{r}} c(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}, \tag{15}$$

$$c^\dagger_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{r}} c^\dagger(\vec{r})e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{16}$$

と定義すると，これらは $\{c_{\vec{k}}, c^\dagger_{\vec{k'}}\} = \delta_{\vec{k},\vec{k'}}$ を満たし，他の反交換子はすべてゼロとなる．これらを用いると，ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{e}} = \sum_{\vec{k}} \mathcal{E}_{\vec{k}} n^{\mathrm{e}}_{\vec{k}} \tag{17}$$

となる．ただし，$\mathcal{E}_{\vec{k}} = -2t\sum_i \cos(k_i a) - \mu$ とし，$n^{\mathrm{e}}_{\vec{k}} = c^\dagger_{\vec{k}}c_{\vec{k}}$ は波数 $\vec{k}$ を持つ電子の個数演算子である．$n^{\mathrm{e}}_{\vec{k}}$ の固有値は電子がフェルミ粒子であることを反映して $0, 1$ のみである．このハミルトニアンの基底状態は，$\mathcal{E}_{\vec{k}} \geq 0$ である $\vec{k}$ について $n^{\mathrm{e}}_{\vec{k}} = 0$，それ以外の $\vec{k}$ について $n^{\mathrm{e}}_{\vec{k}} = 1$ で与えられる．このように，基底状態では（化学ポテンシャルを含めて）負のエネルギーを持つ準位にフェルミ粒子が詰まっていることをフェルミ海と呼ぶことがある．$\mathcal{E}_{\vec{k}} = 0$ となる $\vec{k}$ の集合は，波数空間中において基底状態で電子が詰まった状態と空いた状態の境界となり，**フェルミ面**と呼ばれる．フェルミ「面」というのは空間 3 次元の一般的な系ではフェルミ面が曲面であることからの呼称であり，一般的な 2 次元系では実際には曲線，1 次元系では点

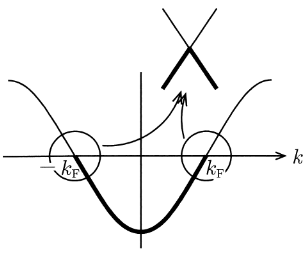


図１　１次元電子系のバンド構造の例．太線部分は負エネルギー準位を表し，基底状態ではこれらの準位を電子が占有している．フェルミ点付近の低エネルギー励起に注目すると，空間１次元の相対論的なディラック電子と同じ構造を持つ．

となる．

低温・低エネルギー極限での物性はフェルミ面付近の電子励起が支配するが，これは２次元以上の系では当然フェルミ面の形状を反映する．このようなフェルミ面は，素粒子物理で通常用いられる相対論的な場の理論には登場せず，物性物理学に特徴的な概念であると言える．実際の物質のフェルミ面の形状は多彩であり，物質の豊かな個性の一部はこのフェルミ面に由来している．逆に，そのために普遍的な理論的な取扱いの困難も生じると言える．

一方，１次元系では，一般にフェルミ面が点になる．低エネルギーの電子励起は，フェルミ点の周囲で分散関係を線形近似して取り扱うことができる．我々の模型の１次元版は $2t > |\mu|$ であれば２つのフェルミ点 $k = \pm k_F$ を持つ．フェルミ点 $k = k_F$ 付近では電子は右方向に，$k = -k_F$ 付近では電子は左方向に動く（図 1）．我々の模型に限らず一般に，ハミルトニアンが近距離の飛び移りのみを含む１次元電子系では，右方向に動く電子と左方向に動く電子が対となって現れる．これは，分散関係の連続性と，波数空間の周期性の必然的な帰結であり，１次元の格子模型では右方向に動く電子のみを実現することは不可能である．これは，格子ゲージ理論で見出されたニールセン・二宮の定理[3] の１次元版である．一方，２次元の量子ホール状態を考えると，その端状態として右向きのみに動く１次元電子系を実現することができる[4]．波数をフェルミ点を基準として計ることにすると，２つのフェルミ点の周囲の低エネルギー励起は，相対論的な**ディラックフェルミオン**と見なすことができる．ただし，このとき「光速」に相当するのはフェルミ点での電子の速度であり，実際の物質では光の速度よりもかなり小さい．なお，２次元系，３次元系でも特殊な場合にはフェルミ「面」が実際には点になる場合があり，そのような場合には相対論的な場の理論による電子の低エネルギー励起の記述が可能となる．

さて，１次元電子系の低エネルギー励起について，比熱を考えよう．フェルミ波数を基準とした波数 p のモードについて，エネルギーを $\mathcal{E}_p = v_e p$ とする．このとき，波数 p のモードについてエネルギーの期待値は

$$E_p = \frac{v_e p}{1 + e^{\beta v_e p}} \tag{18}$$

であるから，これに対応した比熱は

$$C_p = \frac{1}{k_B T^2} \frac{(v_e p)^2}{(1 + e^{\beta v_e p})^2} \tag{19}$$

となる．各モードからの寄与を合計すると，体積あたりの比熱は

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{k_B T^2} \int \frac{dp}{2\pi} \frac{(v_e p)^2}{(1 + e^{\beta v_e p})^2} \\ &\propto T \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p} \frac{\tilde{p}^2}{(1 + e^{\tilde{p}})^2} \propto T \end{aligned} \tag{20}$$

となる．ただし，温度 T によらない比例係数は無視した．また，上記では $k = k_F$ 付近（右方向に動く電子）のみ考えたが，$k = -k_F$ 付近も比熱には同様に寄与するので，T に比例するという結論は変わらない．

高次元の場合，フェルミ面の存在によって計算は面倒になるが，比熱に関しては，波数空間でフェルミ面に直交する方向は上記で考えた１次元系と同じ問題になる．フェルミ面に沿った方向は，そのような１次元系が多数存在するものと解釈することができる．そのため，フェルミ面が存在するような一般的な高次元電子系では比熱は次元によらず T に比例する．

5. フェルミ粒子系とボース粒子系

量子力学や統計力学で学ぶように，フェルミ粒子とボース粒子は一般に全く異なる振舞いをする．実際，前節までで，d 次元の簡単な格子模型について，フォノンの比熱は T^d に比例する一方，電子比熱は次元によらず T に比例することを見た．これは，前者がボース粒子，後者がフェルミ粒子であることの帰結であるとも言える．しかし，１次元では，比熱はともに T に比例することになる．もちろんこれだけだと偶然一致しただけという可能性も考えられるが，実はこの比熱の振舞いの一致は，より深い事実の反映なのである．１次元では，電子系のようなフェルミ粒子の多体系が

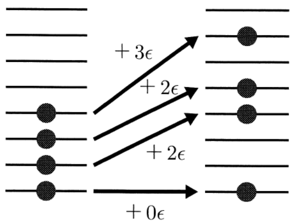


図 2 線形分散を持つフェルミ粒子系における基底状態（左）と粒子数が等しい励起状態（右）の例．エネルギーの高い粒子から順に励起されたと考えると，励起状態は各粒子の励起エネルギー ϵm_j によって一意に表すことができる．この例では，$m_1 = 3, m_2 = m_3 = 2, m_4 = 0$ となる．

ボース粒子の系と等価になるという驚くべき関係が成立する．このことは，朝永振一郎が最初に指摘し，その後 1 次元の量子多体系という非常に豊かな分野が発展する重要なきっかけとなった[5)]．この等価性についての詳細は教科書や解説[6)]に譲るが，ここでその一端を簡単に見ておきたい．

上と同様に，フェルミ点を基準とする波数を p とし，フェルミ点付近で線形化した分散関係を $\mathcal{E} = vp$ とする．長さ L で周期的境界条件を課した系では，波数は $2\pi a/L$ の整数倍に量子化されているので，エネルギー準位は整数 m を用いて $\mathcal{E} = \epsilon m$ と書ける．ここで，$\epsilon = 2\pi va/L$ である．フェルミ点付近の低エネルギーの励起は，負のエネルギーを持った電子を正のエネルギーを持った状態に移すことで作られる．ただし，電子は区別がつかない同種粒子なので，どの電子がどこに移ったかについては複数の解釈が可能である．そこで，以下のようなルールに従って，解釈を一意に定めることとする．励起状態で一番上のエネルギー準位を占める電子は，基底状態でも一番高いエネルギーの電子が移ったものとする．以下同様に，基底状態で 2 番めのエネルギーを持っていた電子が励起状態でも 2 番目に移った，等と考える．すると，高いほうから j 番目の電子の励起エネルギーは非負の整数 m_j を用いて $\epsilon_j = \epsilon m_j$ と書け，これらは

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \ldots \geq 0 \tag{21}$$

を満たす（図 2）．また，このとき全体の励起エネルギーは

$$E = \epsilon \sum_j m_j, \tag{22}$$

となる．一方，分散関係が $\mathcal{E} = vk$ であるようなフォノンを考える．電子も右向きに動くものだけ考えたことに対応し，フォノンも $k \geq 0$ の，右向きに動くものだけを考える．このとき，エネルギー準位は非負の整数 m を用いて $\mathcal{E} = \epsilon m$ と書ける．フォノンが複数あるとき，それぞれのフォノンが占有する準位を $m_1, m_2, \ldots$ で表そう．すると，全体の励起エネルギーは (22) で与えられる．複数のフォノンの区別はつかないので，m_j と m_l を入れ替えても同じ状態を表す．従って，複数のフォノンの状態を一意に表すため，m_j を大きい順に並べることにする．ただし，ボース粒子なので，m_j の中に互いに等しいものがあってもよい．従って，m_j は (21) を満たす．

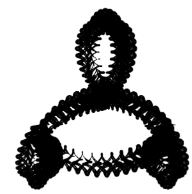
以上より，電子（フェルミ粒子）系におけるエネルギー準位と，フォノン（ボース粒子）系におけるエネルギー準位が全く同じ整数の組 (21) によって全く同じ (22) 式で表されることがわかる．すなわち，フェルミ粒子系とボース粒子系の状態は 1 対 1 に対応している！ この驚くべき事実は，もちろん一般に成立するものではなく，線形分散を持つ 1 次元系に限定されている．しかし，前述のように，この対応関係は 1 次元量子多体系の豊かな物理の一つの基礎となっている．本記事では紙数の関係で詳細は議論できないが，簡単な模型の中にも物性物理学に現れる様々な深い概念の一端を見ることができることを実感して頂ければ幸いである．

参考文献

1) 解説記事として，例えば青木秀夫，「南部理論と物性物理学」，日本物理学会誌 **64**, 80 (2009).
2) 教科書として，例えばアシュクロフト・マーミン，『固体物理の基礎』，松原武生，町田一成（訳），吉岡書店（上・I, II：1981，下・I, II：1982）.
3) H.B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys. B* **185**, 20 (1981).
4) 教科書として，例えば吉岡大二郎，『量子ホール効果』（新物理学選書），岩波書店 (1998).
5) S.-I. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 544 (1950).
6) 教科書として例えば，川上則雄，梁成吉，『共形場理論と 1 次元量子系』（新物理学選書），岩波書店，(1997).

（おしかわ・まさき，東京大学物性研究所）

素粒子物理学



林　青司

1. 素粒子の標準模型

素粒子の振舞いを見事に説明するものとして「素粒子の標準模型」という理論が確立している．この理論が予言する唯一の未発見粒子であった**ヒッグス粒子**も 2012 年 7 月に発見され，最終的な確立に到った．この節では，この「**標準模型**」についてその概略をごく簡単に解説する．

1.1 素粒子とは？

素粒子とは万物を構成する最も基本的でそれ以上分割できない粒子，というのがその定義である．この世のすべての物質は 118 種類の原子の組合せでできているが，原子は原子核とその周りを周回する何個かの電子 e^- よりなる．電子はそれ以上分割できず素粒子である．一方，原子核は何個かの陽子 p と中性子 n が結合したものであるが，これらは内部構造を持っていて，3 個の**クォーク**と呼ばれる素粒子が強く結合したものであると思われている．具体的には，陽子，中性子は u, d（アップ，ダウン）クォークが次のように 3 個結合したものである：$p = (u, u, d)$, $n = (u, d, d)$.

このように，（現在の）宇宙に存在する物質はすべて u, d クォークと電子 e^- でできているが，u, d はペアーで現れるのに対し，電子は孤立しているように見える．実は，電子にもパートナーが存在する．それはニュートリノ，正確には電子ニュートリノ ν_e である．後で述べるように，素粒子に働く力の一つである弱い力による典型的な過程である“ベータ崩壊”では，e^- と ν_e がペアーをなして現れる．原子核を構成するクォークに対して，電子と電子ニュートリノは**レプトン**（軽粒子の意）と総称される．結局，すべての物質はクォークとレプトンという素粒子で構成されていることになる．

1.2 クォーク，レプトンは繰り返し現れる

不思議なことに，クォーク，レプトンの世界では，既に述べた (u, d), (ν_e, e^-) の他にも，電荷等が全く同じ素粒子がコピーのように，さらに 2 セット現れる．即ち，標準模型に登場するクォーク，レプトンは以下のようである：

$$\begin{aligned}&\text{クォーク}：\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \\ &\text{レプトン}：\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1}$$

このことを，クォーク，レプトンには 3 つの“**世代**”があると言う．左から，第 1 世代，第 2 世代，第 3 世代と呼ばれる．世代による唯一の違いは，世代が大きくなるに連れて質量が大きく（重く）なるということである．例えば，u, c, t の持つ電荷等の（加算的）量子数は全く同じであるが，質量のみが階層的に大きく異なる．実は，ワインバーグとサラムにより標準模型が提唱された当時は，クォークとしては u, d, s の 3 種類のみが入っていたが，後述のように，“**CP 対称性の破れ**”を説明するために，小林・益川によって 3 世代，従って 6 種類のクォークが導入され，現在の形の標準模型が完成したのである．

1.3 素粒子に働く4つの力

クォーク，レプトンといった素粒子の間に働く力（正式には**相互作用**）には4種類あることが知られている．日常生活でなじみ深いのは**重力**（万有引力）と**電磁気力**であるが，これらに加えて，原子核のサイズ以下の非常にミクロな世界で働く短距離力として，**強い力**と**弱い力**がある．

強い力は原子核を構成するクォークのみに働きレプトンには作用しない．例えばヘリウム原子において，原子核に2個の陽子があるのに原子核がバラバラにならないのは，電磁気力による斥力に打ち勝つ，正に強い力による引力が核子間に働くからである．一方，弱い力による典型的な過程は，既に述べた放射性原子核のベータ崩壊という現象である．化学反応式に良く似た"素粒子反応式"で書くと，ベータ崩壊は $d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$ と書ける．ここで $\bar{\nu}$ はニュートリノの反粒子（反粒子については後述）．$\bar{\nu}_e$ を左辺に移項し ν_e に変える（数式で移項すると符号が逆転するのと同様）と $d + \nu_e \to u + e^-$ となり，クォークのセクターでは $d \to u$，レプトンでは $\nu_e \to \ e^-$ という(1)の第一世代のペア（2重項（doublet）とも呼ばれる）をなす素粒子の間の遷移が起きていることが分かる．

ここで一つ注意すべきなのは，ベータ崩壊に関与するのは，実は左巻きのクォークやレプトンのみであるという事実である．これは，後述のように弱い力では"パリティー（P）"対称性が破れているということを端的に示している．つまり2重項をなすのは $(u, d)_{\mathrm{L}}$ 等で表される左巻きの素粒子である．左巻きとは何であろうか．クォーク，レプトンのような物質を構成する素粒子はスピンの大きさが $\frac{1}{2}\hbar$ のフェルミ粒子であるが，スピン回転と運動量の関係が，ちょうど左ねじの回転方向と進行方向の関係と一致するような状態のフェルミ粒子を左巻きと称するのである．

日常のマクロの世界での常識と大きく異なり，素粒子の世界では4つの力のうちで重力は極端に微弱な力である．実際，電子を例にとると，その間に働く重力は電磁気力に比べ38桁ほど小さな力である．そこで，標準模型では重力を除く3つの力を，すぐ後で述べる**ゲージ対称性**に基づく**ゲージ理論**の枠組みを用いて記述している．

重要なことは，標準模型では3つのすべての力に対し，それを媒介する**ゲージ・ボソン**（ゲージ粒子とも言う）と呼ばれる粒子がそれぞれ存在し，それらがクォークやレプトンの間でキャッチボールのようにやり取りされることで素粒子間に力が（間接的に）働くということである（重力についても重力子が力を媒介する）．こうして，物質を構成するクォークやレプトン，それらの間の力を媒介するゲージ・ボソン，それと，最近スイスのCERNでのLHC実験で発見されたすべての素粒子（自分自身を含む）に質量を与えるヒッグス粒子が，標準模型に登場する素粒子の全体像である．

なお，各素粒子には，質量や寿命が全く同じながら，電荷等の（加算的）量子数の符号が反対の"**反粒子**"が存在すべきであることがP.A.M. Diracによって理論的に予言され，現在では反粒子の存在は疑いのないものである．例えばがん治療に使われるPETは，電子 e^- とその反粒子である陽電子 e^+ が対となって消滅する素粒子反応を応用したものである．ただし，光の粒子であり，電磁気力を媒介するゲージ・ボソンでもある光子のように，粒子と反粒子の区別がない（光子は電荷を持たず，$-0 = 0$）素粒子も例外的に存在する．ニュートリノもそうした素粒子であるとの有力な説もある．

さて，この特集の趣旨は「異なる分野間の関連について議論する」ことである．ガリレイは「宇宙という書物は数学の言葉で書かれている」と言ったそうであるが，確かに素粒子物理学は，**相対性理論**[1)]をはじめ，**宇宙論**や，（特に宇宙論，天文物理学への関与を通じて）**統計物理学**，**原子核物理学**といった他の物理学の分野と密接に関連しているのみならず，**数学との関連**も非常に密であると言える．とりわけ，素粒子の標準模型においては，日常生活でもなじみ深い"**対称性**"の概念が決定的に重要な役割を演ずる．後述のゲージ対称性のような連続的な対称性の場合には，それを記述する数学である**連続群**（**リー群**）**論**が活躍する．以

下のいくつかの節を用いて標準模型で決定的に重要な役割を演じる対称性について，その概念をできるだけ直感的に解説しよう．

■ 2．ゲージ対称性 ■

この節では，標準模型の代わりにゲージ理論の雛形とも言える，電子と光子の電磁相互作用を記述する理論であるQED（量子電磁力学，Quantum Electro-Dynamics）を例にとって，ゲージ対称性の概念について考える．まず，光子の存在しない電子のみの理論から出発してみよう．光子がいないので電子は一切力を受けず“自由粒子”として空間を伝播する．一般に理論は運動方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）を導く**ラグランジアン**によって完全に規定されるが，解析力学でも，例えば調和振動子のラグランジアンは力学変数 x の2次形式であるように，電子に関するラグランジアン密度 $\mathcal{L}_e$ も，電子を相対論的に記述する4成分のベクトル場（ディラック・スピノール）ψ の2次形式で，以下のように書かれる：

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi. \tag{2}$$

ここで m は電子の質量，γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ は 4×4 のディラック行列であり，$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$. また，重複して現れる添字 μ については0から3までの和（相対論的な内積）をとるものと考える．

ディラック・スピノール ψ に対し次のような位相変換をしてみよう：

$$\psi \ \rightarrow \ \psi' = \mathrm{e}^{ie\lambda}\psi. \tag{3}$$

ここで e は電気素量．こうした変換を“**ゲージ変換**”という．ただし，まずは変換のパラメター λ が時空点に依らない定数であるような“**大域的ゲージ変換**”を想定する．このとき，明らかに $\mathcal{L}_e$ は ψ' で書き直しても不変であり，ゲージ変換の下での理論の不変性，即ち“ゲージ対称性”が存在することが分かる．ネーターに依れば大域的対称性からそれに伴う保存則が得られるはずであるが，このゲージ対称性から帰結されるのは電子の電荷の保存則に他ならない．

しかし，宇宙の果てまで，どの時空点でも一斉に同じ変換をするという考え方は，信号は決して光速を超えて走らないという相対性理論の要請からすると少々不自然な気もする．そこで $\lambda(x^\mu)$ のように，変換パラメターが時空点に依存して連続的に変化することを許す“**局所ゲージ変換**”を考えると，今度は(2)のうちの x^μ に関する偏微分を含む項（電子の伝播を司る“運動項”）から $\partial_\mu\lambda$ に比例した“おつり”の項が生じ，もはや $\mathcal{L}_e$ はゲージ不変ではなくなる．おつりが出る原因を考えてみると，微分項は，ある時空点 $\mathrm{P}(x^\mu)$ と，そこから無限小 dx^μ 離れた $\mathrm{Q}\ (x^\mu + dx^\mu)$ での場の値 ψ の差である“差分”を考えることと同等であるが，PとQでのゲージ変換のパラメターがそれぞれ $\lambda(x^\mu)$, $\lambda(x^\mu + dx^\mu)$ と異なるために，差分 $\psi(x^\mu + dx^\mu) - \psi(x^\mu)$ の変換は，大域的ゲージ変換のときのような単純な位相変換とはならない，というところに原因があるのである．実際，$\partial_\mu\lambda$ は時空点による位相変換のズレを表している．こうした事情を幾何学的に理解するために，P, Qのそれぞれの時空点の“内部”に複素平面（“**内部空間**”）がそれぞれあると考え，それぞれの複素平面上で，複素場（ディラック・スピノール ψ の4つの成分のいずれか）が，2成分ベクトル $\vec{\psi}(x)$, $\vec{\psi}(x+dx)$ として表されていると考える．複素場に対する位相変換であるゲージ変換は，複素平面の座標軸（実軸，虚軸）の回転と等価なので，局所ゲージ変換を許すと，P, Qでの複素平面の座標系は一般にずれて（相対的に傾いて）いる．ここでQ点で定義されたベクトル $\vec{\psi}(x + dx)$ をP点まで“平行移動”してP点での複素平面上のベクトル $\vec{\psi}_{\parallel}(x)$ が得られたとする（図1を参照）．

P, Qでの複素平面の座標軸は相対的に無限小角 $d\theta$ だけ傾いているとすると，$\vec{\psi}_{\parallel}(x)$ は元の $\vec{\psi}(x + dx)$ を角 $d\theta$ だけ回転したものになる．ここであたかも全微分の式のように $d\theta = eA_\mu dx^\mu$ と書くことにする（つまり A_μ は μ 方向に行った時の座標軸の傾きの変化率に対応）．すると差分 $\vec{\psi}_{\parallel}(x) - \vec{\psi}(x)$ は同一点Pに置かれた2つの

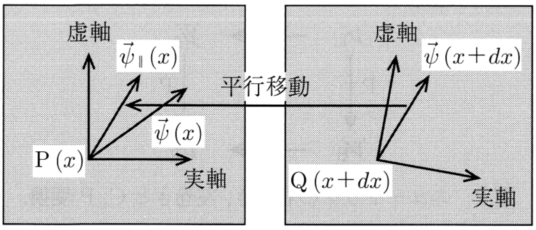


図 1　“内部空間” における平行移動.

ベクトルの差であるから，今度は点 P における位相変換に従って（共変的に）変換し，ゲージ不変性が回復することになる．この差分を，ベクトルから複素場に焼き直して書くと $\psi_{\parallel}(x) - \psi(x) = \mathrm{e}^{ieA_\mu dx^\mu}\psi(x + dx) - \psi(x) = (\partial_\mu\psi(x) + ieA_\mu\psi(x))dx^\mu$（複素平面上の角 $d\theta$ の回転は，複素場の $d\theta$ の位相変換と同等）．これを $(D_\mu\psi)dx^\mu$ と書けば

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \tag{4}$$

が得られるが，これが**共変微分**と呼ばれるものである．こうして理論に導入された A_μ は，物理的には電磁場を記述する 4 元の電磁ポテンシャルと同定すべきものであることが分かるが，一般にはゲージ対称性の帰結として現れる場なので **“ゲージ場”** と称される．結論として，(2) の偏微分を，共変微分 (4) に置き換えてやれば，ゲージ対称性を持つ理論が完成することになる．

共変微分の項から $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ という場の 3 次式が新たに現れるが，これは電子が光子（場 A_μ を量子化して得られる光の粒子）を吸収したり放出したりして電磁気力をやり取りすることを記述している．こうして

「局所ゲージ対称性 → ゲージ場 → ゲージ・ボソン → それで媒介される相互作用」

のように，理論に局所ゲージ対称性を課すことで，その対称性に伴う相互作用が必然的に生じることになる．これを**「ゲージ原理」**という．なお，QED の場合には A_μ で記述される粒子は光子に他ならないが，一般にはそうした粒子はゲージ・ボソンと呼ばれる．

似たようなことは**一般相対性理論**でもあり，同

様の考察から平行移動の概念，共変微分が導入される．この場合，時空の異なる2点での一般座標のズレを調整するために導入される，ゲージ場 A_μ に対応する場は **“接続場”**（クリストフェル記号）$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ である．このように，素粒子理論でのゲージ場に関して一般相対性理論と同様な（**微分**）**幾何学的意味づけ**が可能であり，これも一つの分野関連の例と言えるであろう．

■ 3. 線対称性とCP対称性, 小林・益川理論[2] ■

2008年度ノーベル物理学賞を授与された小林・益川模型[3] の業績は，実験で発見された（クォーク・セクターにおける）CP対称性のわずかな破れを標準模型のゲージ理論の枠内で説明しようとすると，2世代のクォークでは無理で，3世代のクォークが必要であることを理論的に示したことであった．ここでは，その議論を詳細に説明することはできないが，なぜ2世代と3世代の間には本質的な違いが存在するのかという点について，線対称性を用いて直感的に説明しよう．

CP対称性とは，C変換とP変換を同時に行うCP変換の下での不変性のことである．ここで，**C変換**とは，粒子と反粒子を交換する **“荷電共役（charge conjugation）” 変換**であり，また，**P**（**パリティー（parity）**）**変換**とは，$\vec{r} \to -\vec{r}$ のように空間座標の符号を反転させる変換であるが，P変換は鏡に映る像の位置に変換する**鏡像変換**と実質的に等価である．鏡に映すと右手と左手が入れ替わるように，P変換の下でクォーク，レプトンの**右巻き**と**左巻き**の状態は互いに入れ替わる．

素粒子の相互作用のうちで，なぜか弱い相互作用のみにおいては，PもCも対称性が大きく破れている．それを端的に表す事実として，弱い相互作用に関与するニュートリノは，左巻きのニュートリノ ν_{L} か右巻きの反ニュートリノ $\bar{\nu}_{\mathrm{R}}$ のいずれかのみである，という事実があり，標準模型ではこれらの状態しか導入されていない．つまり，ν_{L} をP変換した ν_{R} やC変換した $\bar{\nu}_{\mathrm{L}}$ は理論に存在せず，ちょうどハート形の左半分が欠けてしまったために線対称性が大きく（最大限に）破れている，という状況と同様に，C,Pいずれの対称性も最大限に破れているのである．しかし，CP変換をすると，CP: $\nu_{\mathrm{L}} \ \to \bar{\nu}_{\mathrm{R}}$ であり，今度は変換先の状態が存在するので，CP対称性だけは存在するのではと期待された（図2を参照）．しかしながら1964年のK中間子の崩壊実験で，このCP対称性もわずかに破れていることを示すデータが得られ，この事実をいかに理論的に説明するか，というのが素粒子理論の大きな課題となった．

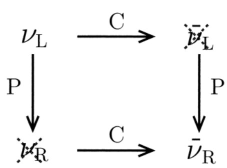


図2　ニュートリノの右巻き, 左巻きとC, P変換.

本質的なことは，CP変換はクォークの場に対する複素共役を伴う変換である，ということである．それは，C変換が場の複素共役変換を伴う変換であるからである．実際，例えばゲージ変換の関係式(3)の複素共役をとると，$\psi \to \psi^*$, $e \to -e$ と変換されるが，これは ψ^* が電荷が逆の反粒子を表していることを意味する（正確には，C変換の下でディラック・スピノールの成分も行列の掛け算による線形変換を受ける）．こうして，きちんと示すことはしないが，理論に存在するパラメター，特にヒッグス粒子がクォークに質量を与えるために必要な **“湯川結合定数”** が実数であればCP対称性は破れないことが分かる（実数は当然複素共役の下で不変である）．つまり，湯川結合が位相を持った複素数であることがCP対称性を破るための必要条件なのである．では，逆に湯川結合が複素数であればCP対称性はいつでも破れるのであろうか？ 実際，クォークが2世代しかない場合でも湯川結合を複素数とすることは可能である．しかし，小林・益川の議論は，2世代の場合には湯川結合の持つ位相は物理的には意味のないもので，クォークを記述する複素場の適当な位相変換によって常に実数にしてしまうことが可能である，

というものである．量子力学では，波動関数の位相を変えても粒子の存在確率は変わらないが，場の理論でも同様に，複素場については，場の位相を定数だけ変えて“**位相の再定義（re-phasing）**”を行う自由度が存在することに注意が必要である．小林・益川の論文で議論された非常に重要な結論は，3 世代の場合には，こうしたクォーク場の位相の再定義では吸収し切れない物理的に意味のある位相因子が一つだけ残り，これが CP 対称性の破れを引き起こすということである．

さて，こうした 2 世代と 3 世代の間の本質的な違いは，数式を用いなくても線対称性を用いて容易にその本質の理解が可能である．CP 変換は複素共役（charge conjugation）と密接に関係していると既に述べたが，複素平面を考えると，複素共役とは，実軸に関して線対称に折り返す変換に他ならない．まず，2 世代の場合に対応して，複素平面上に原点 O ともう一点 A をとり，これを結ぶ線分 OA を考える．CP 変換に対応して OA を実軸に関して折り返すと，線分 OA′ に変換される．一見 OA と OA′ は位置も違い別の図形に見えるが，OA′ を原点の周りで適当な角度回転させると元の OA にぴったり重ねることができるのである（図 3 を参照）．原点の周りの回転は，ちょうど上で述べたクォークの場の位相の再定義に対応していて，回転すれば図形が一致するということは，物理的には CP 対称性は破れていないことを意味しているのである．では，3 世代にするとどこが変わるのであろうか？ 今度は 3 世代に対応して原点 O と A, B の計 3 点を結ぶ三角形を考える．これを実軸に関し折り返すと三角形 OA′B′ が得られるが，図 3 から明らかなように今度は原点の周りで回転しても OA′B′ を OAB に完全に一致させることは（三角形が閉じてしまわない限り）無理である．こうして CP 対称性は破れることになる．なお，専門用語では，上記の三角形は“**ユニタリティー三角形（unitarity triangle）**”と呼ばれ，小林・益川行列（ユニタリー行列）の異なる行あるいは列の間の直交性を複素平面上で表現したものである．

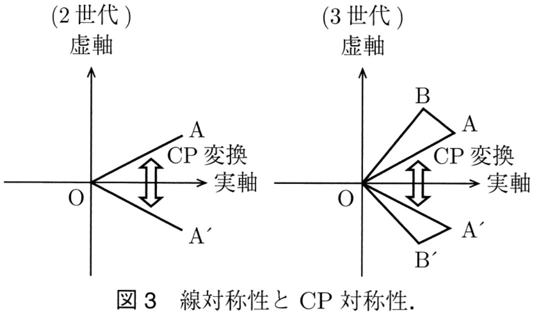


図 3　線対称性と CP 対称性．

4. 素粒子は宇宙をも記述する

素粒子物理学の他分野との深い関連の典型的な例が宇宙論であろう．そもそも素粒子と宇宙は，この世で考え得る最もミクロとマクロの世界で両対極にあり，一見全く別の研究対象と思えるが，実は非常に密接に関連している．**ビッグバン宇宙論**によれば今の宇宙は膨張しているわけだが，これは時間を逆戻しすれば宇宙はやがて非常に小さな領域に現在宇宙にあるすべてのエネルギーが凝縮された極めてミクロで高温の世界になることを意味する．即ち，誕生時の宇宙は多数の素粒子が熱浴中を運動している世界であったわけで（膨張に伴い温度は冷えていくが），統計物理学の法則に従っていろいろな素粒子反応が起きていたはずである．

最後に，宇宙論において素粒子論の果たす役割の重要な例として，そもそも**この宇宙に我々がこうして存在できているのは，上で議論した素粒子の世界での CP 対称性の破れのおかげ**である，という事実を紹介してこの解説を終えよう．これは背理法を用いて示すことができる．まず，誕生したばかりの極めて高温の宇宙は光，つまり光子で満ちていたと考えられている．光子どうしの衝突によりクォークやレプトンが頻繁に生成されていたはずだが，重要なことは，その生成の過程で，素粒子とその反粒子が常にペアで現れ（電荷が“プラス・マイナス・ゼロ”で相殺するように），生成される粒子と反粒子の数は完全に等しくバランス

しているということである．仮に素粒子の相互作用においてCP対称性が破れていないと仮定すると，C対称性と同様にCP対称性は粒子と反粒子の間の対称性なので，最初に等量存在していた粒子と反粒子の間のバランスは宇宙の進化の過程でも決して崩れないはずである．しかし，現在の宇宙に，反粒子でできた“反原子”，“反星”，等々は一切見つかっておらず，またもし反粒子が存在したとしても，粒子・反粒子のバランスが保たれていると，それらは最終的に完全に対消滅して宇宙には何も物質が存在しないことになってしまい，現実と合わない．つまり，我々が今こうして存在できているためにはCP対称性の破れが必要であるということである（ただし，これだけでは宇宙に物質が生成されるための必要十分条件とはならず，他に2つの条件を付け加える必要がある）．しかし残念ながら，小林・益川模型によるCP対称性の破れでは，実測されている宇宙の物質量を説明するには不十分であると思われており，宇宙における暗黒物質の存在等と並んで，標準模型を超える新理論の必要性を強く示唆するものであると理解されている．

参考文献

1) 相対性理論に関しては，本特集の早田氏の解説記事を参照されたい．
2) この節の内容については，次の文献を参照されたい：林青司：『CP対称性の破れ—小林・益川模型から深める素粒子物理』，サイエンス社（SGCライブラリ91）(2012)．
3) M. Kobayashi and T. Maskawa, *Progress of Theoretical Physics* **49**, 652 (1973).

（りん・せいじ，東京女子大学現代教養学部）

量子重力理論



橋本 幸士

1. 未解決分野としての「量子重力理論」

量子重力理論，という言葉は難しい．なぜなら「量子重力理論」という表現から想像される分野観とはうらはらに，この言葉は未解決分野を表しているからである．つまり，量子重力理論は何ですか，と尋ねられたとしても，「量子重力にはこのようなスタンダードな手法があり…」と答えられるような確立した理論立てがまだ発見されていないのである．

量子重力の問題とは，言葉に明らかに含有されている通り，**量子力学**と**重力**の両方を矛盾なく理解するという問題である．ここで，理解する，というのは抽象的な意味ではなく，物理学の理論の問題であるので，具体的な課題がある．それらは物理的な量を与えられた初期条件から計算する，ということである．量子重力の問題とは，例えば，重力相互作用が入った理論において，素粒子の散乱を量子的に評価し散乱振幅を計算する，という問題であるとか，重力が強くなるブラックホールなどの時空のゆがみの効果が量子力学に与える影響，例えば粒子・反粒子対の生成確率や，量子力学的状態数を計算する，といったことを意味する．

これらの問題に対して，ある程度一般的な重力を含む理論については一般的解法が見つかっていない．これが量子重力理論の問題であり，量子重力の分野とは，これらを解決する方法や理論を発見し解析する学問分野である．

量子力学と重力を矛盾なく理解する，という課題は，単に多様な物理学の中のある2分野の間の関係を明らかにするという矮小な問題ではない．量子力学（本特集の谷村氏の論説を参照）は，物質や力を微視的に扱う際の基礎力学体系であり，量子力学を礎として，物性物理学，素粒子物理学，量子統計力学，などの魅力ある現代物理学分野が打ち立てられてきた（押川氏，林氏，早川氏の解説を参照）．すなわち，20世紀初頭に原子のスペクトルの理解から発足した量子力学は，20世紀の物理学の隆興の根源となるものである．一方で，1915年にアインシュタインが創始した重力理論は，宇宙についての人類の考えを変えた．一般相対性理論（相対性理論については本特集の早田氏の解説を参照）から現れる宇宙膨張やブラックホールの理論的記述は，時空自身がダイナミカルな物理であることをいう以上に，豊穣な物理現象と爆発的に進展する宇宙観測との整合性を提供している．これらの意味で，いうまでもなく，量子力学と重力は，20世紀に生まれた物理学の2大金字塔である．

従って，量子力学と重力の統合は，単にそれらの「足し算」が計算できるか，という課題ではなく，現代物理学の様相を根源的に見つめ直す「かけ算」であるとも言えよう．重力とは力の一種であるが，他の力，例えば電磁気力は，素粒子論では既に量子力学の拡張としての量子ゲージ理論で矛盾なく記述されている．そのフレームワークに重力というもう一つの力を仲間入りさせる，ということを「量子重力の問題」と考えることもできる．しかし，量子重力は，本稿で述べるように，その解決のために現代物理学に新しい見方・理論とパラダイムを提供する，「かけ算」なのである．発展中の「量子重力理論分野」は，根本問題が解決していない様々な理論のトライアルの集合であり，分野自体はその目標でまとめあげられている，と言っても良いであろう．

2. 量子重力における発散の問題

電荷を持った2つの粒子が電磁気力を介して散乱さ

れるという過程は，素粒子物理学でも物性物理学でも，基本的な相互作用である．荷電粒子の電磁気的相互作用は，場の量子論で矛盾なく記述され，散乱確率が計算される．このとき，計算過程で現れる発散は，電荷を ∞ 倍だけ定義し直すことで有限にでき，この処方を**繰り込み**と呼ぶ．一方で，力を重力に置き換え，物質粒子が重力を介して散乱されるという過程を考えてみよう．量子重力の問題とは，散乱確率の計算に現れる ∞（発散）を理論的に処理できない，という問題である．すなわち，問題は「重力理論が繰り込み不可能である」ということである．

繰り込み理論は場の量子論を摂動的に扱う際に必須の手法であるが，重力理論では摂動論が破綻してしまう状況を簡単に見てみよう．電磁気的相互作用の場合，2 つの荷電粒子の間に働く力の大きさ F は，それぞれの電荷を e とした場合

$$F = e^2 \frac{1}{4\pi r^2} \qquad (1)$$

となる．光速とプランク定数を 1 とおく自然単位系を用いると，次元はすべて質量の次元で測ることができ，これを**質量次元**と呼ぶ．力 F が質量次元 2 を持つことから，電荷 e は質量次元がないことが分かる．電磁気学の結合定数 e は，一つの荷電粒子から光子が一つ飛び出す「強さ」を表す量であり，光子が飛び出して他方の荷電粒子に吸収されるため，力が e^2 に比例する．この状況は，電磁気力ではなくクォークの間に働く「強い力」の場合でも同じであり，強い力の結合定数を g とおけば，強い力を媒介する素粒子グルーオンを一個放出し吸収する場合の力は g^2 に比例する．g は質量次元がゼロとなる．

さて，量子力学では，散乱過程はすべての粒子の経路をある重みで足し上げた結果与えられる．量子力学を多体系に拡張した場の量子論では，一個の素粒子の交換ではなく，多数の素粒子の交換も考慮に入れなければならない．また，それら交換される素粒子の運動量についても足し上げなければならない．これらの観測されない中間過程の光子やグルーオンは，質量殻条件を満たす必要はなく，仮想光子などと呼ばれる．多数の光子やグルーオンが交換されると，その数に関連して e や g のベキが増える．しかも，仮想粒子の運動量について積分する（ループ積分と呼ばれる）ため，増えたベキの部分は一般的に無限大の値を出す．結合定数のベキ展開を場の量子論で行った場合，このように一般的に発散の問題が発生する．繰り込み理論とは，これらの発散がすべて，元の結合定数を ∞ 倍だけ再調整することで有限化できる，という理論手法である．例えば，

$$e \to e\left(1 + e^2 \cdot \infty + e^4 \cdots\right) \qquad (2)$$

といった置き換えを行うのである．散乱過程には，どんな個数の荷電粒子をもってきても良いし，仮想粒子をどれだけたくさん導入しても良いので，一般に無限種類の散乱過程があり，無限種類の発散が生じる．「**繰り込み可能**」な理論とは，上記のような結合定数の操作だけにより，これらの無限種類の発散がすべて有限化できる理論のことを言う．電磁気学と電子の場の量子論である量子電気力学や，強い力とクォークの場の量子論である量子色力学は，繰り込み可能な理論である．また，それらを統合した，素粒子の標準模型も，繰り込み可能な場の量子論である．

懸案の重力理論の場合，質量 m_1，m_2 を持った 2 つの粒子の間に働く力は

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (3)$$

と与えられるため，重力定数 G は質量次元 -2 を持つ．このように負の質量次元を持つ理論は，繰り込み可能でないことが知られている．これは，例えば仮想重力子の交換を考え，それらの交換の際の運動量の足し上げを行うと，質量次元の勘定から

$$1 + Gp^2\infty + \cdots \qquad (4)$$

のように運動量 p に依存せざるを得ず，このような項は元々の結合 G の再調整では吸収できないためである．従って，元々の理論を変更し，このような運動量に依存する結合を始めから導入しておかないと，繰り込みができない．負の質量次元の結合定数を持つ理論では，このような新しい結合の導入が無限回続くことが期待され，閉じた形の理論にはならない．重力は，(3) のように質量（エネルギー・運動量）に結合する理論であるので，質量次元が負となり，一般的な原理から繰り込みが可能でないのである．

3. 量子重力の問題へのアプローチ法

重力を場の量子論として取り扱う場合，摂動論が繰り込み不可能であるという問題が，量子重力の大きな問題の一つである．この問題を解決，もしくは回避するためには，以下のような様々な方法が考えられる．

1) 繰り込み可能な理論からの極限で重力理論が現れるようにする．

2) 摂動的な重力の定義をあきらめ，摂動論によらない手法を作る．

3) 重力理論に他の素粒子を導入し，全体として無限大が出ない摂動論にする．

これらの手法の総体が，量子重力理論と呼ばれる分野である．

いずれの手法にしても，重力理論は**低エネルギーの有効理論**として現れると考えられる．すなわち，高エネルギーの素粒子散乱過程では，アインシュタインの重力理論では取り扱っていない自由度が登場して，繰り込みの問題が解決する，という考え方である．重力結合定数 G の質量次元が負であるため，散乱確率は GE^2 という依存性を持つはずであるが，エネルギー E が大きいと破綻している．このような場合，ある E までしか理論が使えず，それより大きいエネルギーでは，新しい自由度が登場して発散の困難から救われるはずである．実際，フェルミの理論は負の結合定数を持ち，それを救うために W 粒子が高エネルギーで発見され，素粒子の標準模型の根幹を成している．

手法 1) の代表例には Horava–Lifshitz 理論[1]がある．この理論では，アインシュタイン重力の基本原理である一般座標変換不変性を高エネルギーであきらめるが，繰り込み可能な理論である．低エネルギーの有効理論でアインシュタイン重力理論が導かれるとされるが，現在まだ，きちんとアインシュタイン重力になるかどうかということが分かっていない．つまり，高エネルギーで導入される自由度が低エネルギーで消えるかどうかが分かっていない．

手法 2) の代表例には，ループ量子重力理論[2]や，低次元重力理論がある．特に，空間次元が 3 より低いときには，純粋な重力理論などの場合，メトリックをうまく置き換えた力学的自由度で経路積分することを可能にする手法が存在する[3]が，低次元では純粋な重力理論には物理的自由度がないため，3 次元以上の場合が重要となる．摂動論を捨てた場合，我々になじみ深い，平坦な時空上での弱い重力波の伝播をどのように再現するか，が課題となる．

手法 3) には，超対称性の導入された超重力理論，そして**超弦理論**がある．いずれにしても，新しい対称性を導入したりすることで，重力理論に存在する無限大を抑える．超対称性とは，ボソンとフェルミオン（スピンがそれぞれ整数と半奇数）を組として導入することで実現できる対称性であり，ボソンが出した発散をフェルミオンの出す（符号が逆の）発散で打ち消すという性質を持つ．素粒子の標準模型に現れるヒッグス粒子（ボソン）の質量の繰り込みをより「自然（natural）」にするため，超対称粒子を導入して発散を和らげる，といった超対称標準模型が提唱されている．重力理論に超対称性を導入した場合，1 種類の超対称性だと繰り込みができないままであるが，極大超対称性（8 つの超対称性を導入）を持つ $\mathcal{N}=8$ 超重力理論[4]は，発散が全く現れないのでは，との期待がある．しかし，たくさんの超対称性を導入した結果，ボソンのフェルミオンパートナーのさらにボソンパートナー，といった風に素粒子の種類が非常に増えるため，これらが観測されていないことをどのように整合的に説明するかという「超対称性の破れの問題」が常に残る．

4. 解としての超弦理論と有限性

超弦理論は，素粒子を「ひも」に置き換えることにより量子重力の発散の問題を解決する理論である．じつは，この 15 年ほどの精力的な研究で，超弦理論は量子重力としての役割以上に，多彩な他の物理分野との連関を体現していることが明らかになってきた．次節以降でそれを説明するため，本節では量子重力理論として超弦理論を詳細に採り上げることにする．

超弦理論が量子重力理論である理由は次の単純な 2 つの理由による：

- 閉じた弦のある振動モードの相互作用が高次元アインシュタイン重力を再現する．
- 1 ループ振幅はモジュラー不変性により発散がない．

これらを略解してみよう．弦理論では弦の時間変化を記述するために $X^\mu(\tau,\sigma)$ という場を考える．ここで τ は時間であり，σ は弦に沿った方向の座標 $(0\le\sigma\le\pi)$ である．場の値 $(\mu=0,1,\cdots,D-1)$ は，弦が住む時空の座標に相当する．閉じた弦 X^μ の運動として，σ について右回りと左回りのモードが存在する．これらが両方励起した第一励起状態は，右と左それぞれに μ の励起方向を与えられることから，$g_{\mu\nu}(X)$ という重力場の平坦な時空周りの摂動と同じ偏向モードを示す．

懸案の発散の問題を考えよう．仮想弦の交換は，図 1 の上図のような閉じた弦が一周する軌跡で代表される（これをトーラス振幅と呼ぶ）．切り開くと下図のよう

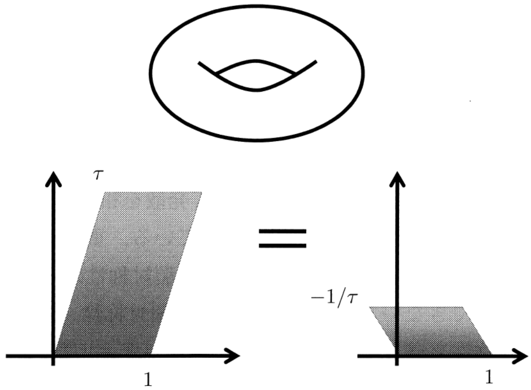


図1　閉じた弦が一周すると，その軌跡は2次元トーラスとなる（上図）．トーラスを切り開くと平行四辺形となり，複素平面上では τ という複素数パラメータで特徴付けられる（下図）．モジュラー変換の一部は，平行四辺形の角度を変えずに大きさを変える変換（共形変換）で移り変わるトーラスの変換であり，τ を $-1/\tau$ に変換する．

になるが，すべての弦の経路を積分するということは，トーラスの形について足し上げるということである．トーラスの形の足し上げが，通常の場の量子論で運動量についての積分を行うことに対応する．ここで，トーラスには，モジュラー変換と呼ばれる対称性を持たせることができる（図1）*1)．**モジュラー不変性**のために，あらゆるトーラスの形について足し上げる必要がなくなり，その縮退の数（無限大）で割ることができる．このため，発散が有限化される．

このように，素粒子（重力子）を弦に格上げすることで，運動量積分がトーラスの形の足し上げに変更され，無限大が発生しなくなる．これが，弦理論が量子重力理論として矛盾なく機能する所以である．

5. 非摂動的弦理論と，他分野との連関の進展

弦理論の登場で，量子力学と重力が矛盾なく記述されるようになった．このことは，本稿の冒頭で述べたように，「かけ算」となって豊穣な新しい物理観を提供することとなった．上記に述べた摂動的有限性は，仮想重力子の交換という，平坦な時空上の物理の無矛盾性に関してだけであったが，本当の重力理論の面白さは，ブラックホールやビッグバンなど，平坦ではない

*1)　2つのトーラスが同じものであると認識するためには，拡大縮小を行わなければならないが，トーラス（世界膜と呼ばれる）の拡大縮小を表す共形不変性を課した場 $X^\mu(\tau,\sigma)$ の理論を弦理論と呼ぶ．

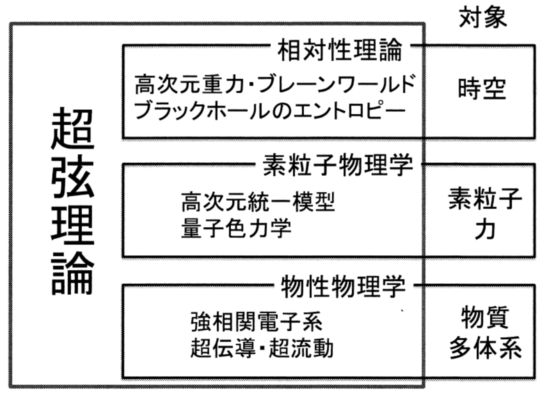


図2　超弦理論と他分野との相関．

時空の物理である．ブラックホール時空では，時空のメトリック $g_{\mu\nu}(x)$ が x の関数として大きく変化しており，局所的に多数の重力子が凝縮していると考えることができる．多数の弦が互いに相互作用し凝縮するとどうなるのか．この問題に対する弦理論の手法が明らかになってきた15年ほど前から，弦理論の本領が発揮されてきた．すなわち，量子重力理論を通じて，曲がった時空のダイナミクスから，物理学の他の分野との全く新しい連関が発見されてきたのである．

以下では，弦理論から見た物理学の他分野との関係を，分野ごとに見ていくことにしよう．本特集で採り上げられている，相対性理論，素粒子物理学，そして物性物理学の各分野は，それぞれ，時空，素粒子・力，物質・多体系を対象とする分野である．多様な対象に対して，弦理論はその豊穣な数理的構造から，非常に興味深い連関を提供してきた（図2）．

5.1 相対性理論との連関

相対性理論での興味ある対象は，ブラックホールなど時空が大きく曲がっている状況の解明である．弦理論は平坦な時空の周りの摂動を量子力学的に矛盾なく説明するが，時空が大きく曲がっている場合についての取扱いは，未だ一般的なものがない．しかし，特殊な場合については広く解明が行われ，それが弦理論の活躍の道を開いた．

特殊な場合とは，時空の特異性が，Dブレーンと呼ばれる，開いた弦の境界条件で代表できる場合である（図3）．開いた弦には端点があるので，その境界条件を選ぶことができる．時空のある場所に弦の端点が乗っているべし，という固定端境界条件を選ぶと，時空の一部に局在化した弦の励起を考えることができる．Dブレーンが弦の端点の集合体であると考えると，それ

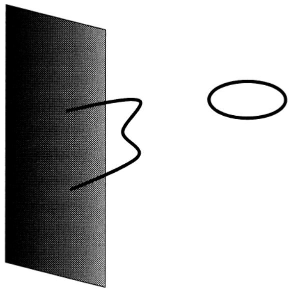


図 3　D ブレーンとは，開いた弦の端点が乗る空間のこと．閉じた弦は，D ブレーンから放出される．

は閉じた弦の発生の源（世界膜の境界）とも考えられ，すなわち重力の源となるのである．

重力の源としてのブラックホールには，量子力学的に解明すべき点が多い．その一つが，ブラックホールの熱力学である．Bekenstein と Hawking が得た，**ブラックホールのエントロピー公式**

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4G} \tag{5}$$

には，ブラックホールの事象の地平面の面積 A が登場し，その微視的な統計力学による導出が望まれている．弦理論は，特殊なブラックホールについて，対応する D ブレーンに乗っている開いた弦の自由度を量子統計力学的に数え上げることで，エントロピー公式 (5) を再現することに成功した[5)]．ブラックホールエントロピーの微視的計算は，量子重力理論の成功のための試金石と考えられ，超弦理論はその関門をパスしたことになる．

超弦理論は，平坦な時空の場合，時空次元が 10 でのみ無矛盾に定式化される．この 10 次元時空の中に様々な次元の D ブレーンを考えることができ，それは様々な高次元ブラックホールに対応する．超弦理論の D ブレーン配置から期待される高次元ブラックホールなど，超弦理論は相対性理論の新しい土壌である高次元重力理論を開拓している．また，超弦理論にはより高い励起状態からくる重力理論への補正が存在し，一般に修正重力理論と呼ばれる体系へのサポートにもなっている．

5.2 素粒子物理学との連関

超弦理論の 10 次元時空を我々の「住む」4 次元時空にするためには，余剰の 6 次元空間を小さく丸め込んでしまうという**コンパクト化**が使われる．コンパクトな 6 次元空間を選ぶ任意性は，残りの 4 次元時空に登場する素粒子の種類に直結している．このため，4 次元時空における多様な場の量子論が，超弦理論のコンパクト化として実現できる．

素粒子の標準模型を超弦理論のコンパクト化から導く試みが続いている．超対称標準模型とほぼ同じ物質種を持つ模型をもたらすコンパクト化は知られており，その手法も D ブレーンの登場により多彩化している．特に，D ブレーンの上に端点を持つ開いた弦の励起状態からは，電磁気学や強い力を媒介する光子・グルーオンなどが自然と現れるため，D ブレーンの上に我々の 4 次元時空の世界が乗っているとする「**ブレーンワールド**（膜宇宙）」仮説が研究されている．D ブレーンの登場により，素粒子標準模型を高次元空間（余剰次元と呼ばれる）に拡大して素粒子の性質を統一的に研究する余剰次元模型の研究が盛んである．相対性理論で高次元重力理論が弦理論との関係性とは既に独立に発展しているのと同様，素粒子現象論でも，余剰次元模型は弦理論との関係性とは独立に大きく発展を遂げている．

素粒子の標準模型の中で，クォークとグルーオンの部分の理論は，低エネルギーでは結合定数 g が大きくなってしまうために（漸近的自由性），摂動論を使えないという理論的な問題がある．この問題に対して大きな進展を与えたのが超弦理論であった．D ブレーンの上の開いた弦のモードからグルーオンを実現できるが，一方で D ブレーンは重力の源となり高次元ブラックホールとしても取り扱えることから，Maldacena は 1998 年に **AdS/CFT 対応**という予想を発表した[6)]．これは，超対称化されたグルーオンの理論のある極限が，高次元の超弦理論（重力を含む）に等価であるという予想である．この AdS/CFT 対応は，変形されたクォーク・グルーオンの理論のある極限を，等価な高次元重力理論で扱うことを可能にする．重力理論側で古典的に計算できる領域が，クォーク・グルーオンの理論としては結合定数が大きい極限になっているため，摂動論では計算できない領域の計算を弦理論が可能にした．AdS/CFT を用いて計算された様々なクォークの複合状態のスペクトルや相互作用は，実験結果や格子数値シミュレーションの結果を良く再現するため，様々なクォークの力学的物理量が，高次元重力理論の言葉で翻訳されるということになった．

この AdS/CFT 対応は，次元の数自体が，結合定数の状況によって解釈を変え得る，という原理（ホログラフィー）を与えている点において，既存の数々の物理理論体系に比べ大きく飛躍している．ブレーンワー

ルド的な高次元素粒子現象論を，4 次元時空で解釈できる可能性もあり，従って，次元という考え方自体を見直すべきであるというパラダイムに到達している．

また，超弦理論という量子重力理論が，AdS/CFT 対応を通じてグルーオンの理論と等価であるため，摂動論を超えれば，既に量子重力理論の発散の問題はグルーオンの理論に焼き直して解決している，ということも示唆される．AdS/CFT 対応は予想であり，証明がないため，今後の理論的発展が待たれる．

5.3 物性物理学との連関

AdS/CFT 対応の発展は，幅広い種類の強結合ゲージ理論に適用できるため，超弦理論の応用は物性物理学にも及んでいる．物性物理学は，電子などの多体系を扱い，新しい物質の様相を研究する．特に多数の電子の量子力学的相関が大きい強相関電子系は，未だ解明されていない高温超伝導物質の基盤を成す系として，研究が進んでいる．AdS/CFT 対応は，結合が強くダイナミクスの決定に多数の素粒子の相関が第一義的に効くという状況で適用可能であるので，強相関電子系への応用，特に，電子系の持つ性質を等価な高次元重力系から予想する，という応用が盛んに行われている．

物性物理学の大きな分野である超伝導を，高次元ブラックホールの現象として理解する「**ホログラフィック超伝導**」[7]が登場して以来，超弦理論による物性研究が盛んに行われている．高次元のブラックホールに，超伝導のクーパー対に対応する高次元スカラー場と，電流電圧に対応する高次元ゲージ場を導入し，スカラー場の凝縮によって相転移が起こる様子や，ギャップの大きさ，電気伝導度の電流振動数依存性などが，高次元重力理論で計算される．

強相関電子にまつわる新奇な相の研究も超弦理論により進んでいる．非フェルミ流体や量子臨界点といった新奇な現象に対し，ユニバーサルな性質を超弦理論から理解する試みなど，積極的に分野の壁を超えた研究が盛んである．さらに，それらの現象の物性物理での存在に触発され，高次元重力側での対応する重力解の存在が予言されたり，また，物性の実験における動的な相転移現象の観測から，重力側でのブラックホールの生成や消滅について仮説が建てられたりなど，双方向の研究交流が行われるフェーズに入っている．

この他，量子情報理論やエンタングルメント・エントロピーと超弦理論の関係の研究も近年進んでおり，様々な理論模型の間を取り持つ量子重力理論としての弦理論の役割が多彩化している．この 15 年ほどの超弦理論の分野連関についての大きな進展を見ていると，今後もより多彩化・深化することは疑いないと感じられる．

参考文献

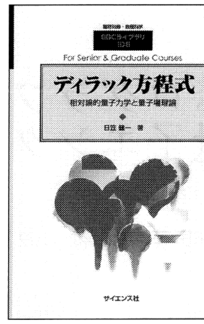
1) P. Horava, “Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009) [arXiv:0901.3775 [hep-th]].
2) C. Rovelli and L. Smolin, “Loop Space Representation of Quantum General Relativity,” *Nucl. Phys. B* **331**, 80 (1990).
3) E. Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System,” *Nucl. Phys. B* **311**, 46 (1988).
4) E. Cremmer and B. Julia, “The $\mathcal{N}=8$ Supergravity Theory. 1. The Lagrangian,” *Phys. Lett. B* **80**, 48 (1978).
5) A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996) [hep-th/9601029].
6) J.M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999) [*Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998)] [hep-th/9711200].
7) S.S. Gubser, “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon,” *Phys. Rev. D* **78**, 065034 (2008) [arXiv:0801.2977 [hep-th]].
S.A. Hartnoll, C.P. Herzog and G.T. Horowitz, “Building a Holographic Superconductor,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 031601 (2008) [arXiv:0803.3295 [hep-th]].

（はしもと・こうじ，大阪大学大学院理学研究科，理化学研究所）

ディラック方程式

相対論的量子力学と量子場理論

日笠健一著，B5 判，176 頁，本体 2295 円，サイエンス社



便利な本が出たものである．便利というのは，学部の3，4年生から大学院初年次の学生を対象にディラック方程式に関する授業やゼミ，あるいは自習の教材を指定する際，これ一冊で足るという教科書がなかなか見当たらなかったが，本書はその要件を満たしているのである．ディラック方程式は，ディラックというアクロバティックな発想の天才がシュレディンガーの量子力学と相対論的量子力学の決定的な違いを顕にして見せた，量子力学の発展史上に燦然と輝く物理の花である．というような，背景の面白すぎる展開に学生が目を奪われてしまうと，現代の高エネルギー物理学の根幹に組み込まれたディラック粒子の本質に行きつけない．一方，近年の場の量子論や高エネルギー物理の教科書では，ディラック方程式は最短時間で通過し，その後に初学者には無理難題に近い広範な理論と応用の洪水となる構成が多い．この手の本で必ず参考文献として挙げられる，今や古典的なビヨルケン–ドレルの教科書からして，ディラック方程式の本質を学ぶだけの為には，その他の部分の分量が多すぎるのだ．

そこで本書の登場である．著者は，高エネルギー物理の現象理論の分野で活躍する研究者であり，本書には理論に偏重して初学者を悩ますことの無いように配慮された著者のバランス感覚が伺える．本書の構成は，ディラック方程式の本質を理解するための9章からなる本文と，必要な知識を補足する補遺6章からなっている．

第1章は，時間に関する1階微分方程式の要請を満たす相対論的波動方程式としてのディラック方程式の導出と，ホールディ変換によるハミルトニアンの対角化を解説したもので，歴史的話題で読者を驚かしたりはせず，極めて標準的な構成となっている．初学者を意識して，ユニタリ変換の展開公式も丁寧に導出しているが，多重交換関係をコンパクトに表すために導入されたリー微分の記法は，やや重く感じられる．第2章は中心力場中のディラック方程式であり，“読み飛ばしても次章以下を読むには支障がない” と記しているが，学生は一度は読むべき内容であり，非相対論的量子力学で水素原子を学んだ者には読めるように書いてある．第3章から5章では，ディラック方程式とその波動関数が相対論的に共変的な理論を構成し，そこに現れる反粒子状態の物理が解説されている．初学者は，ここで γ 行列の言葉でスピノルのローレンツ変換を組み立てることや，荷電共役の表現を学ぶことができる．なお，負エネルギー解に対する歴史的なディラックの空孔理論の解釈と共に，時間をさかのぼる粒子というファインマンの解釈も，あっさりと紹介されている．

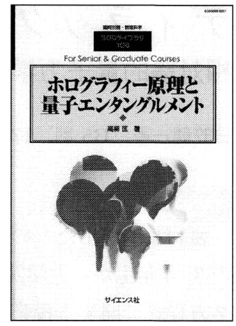
第6章は量子場としてのディラック場の理論であり，本書に見られる量子場の記述はこの章のみで，自由場の議論に止まっている．量子化は，正準量子化を背景としたディラック場の反交換関係による第2量子化で，1928年のヨルダン–ウイグナーから始まりビヨルケン–ドレルの教科書に見られる標準的な構成である．逆にいえば，近年の多くの教科書に見られる経路積分を基礎とする量子化や，これに結び付いたグラスマン変数によるディラック場の記述などは，本書では枠外である．

第7章と8章は，スピン 1/2 粒子の C, P, T 変換を述べているが，スピン 1/2 粒子の，ディラック，ヴァイル，マヨラナの違いが4成分のディラック場を基に説明されているので，改めて2成分スピノルを登場させる場合のように，要らざる混乱を招くことはない．また，離散変換で系の相互作用項に生じる位相が打ち消し合う際の不変性に関連して小林–益川理論にもほんの少し触れて，初学者に夢を持たせている．なお，“ヴァイル” は，英語式に “ワイル” で済ませる教科書が多いが，本書ではドイツ語読みに従っている．終章は，ディラック場の次元に関わる補足と，より進んだ勉強をするための簡単なガイドからなっている．以上，本書は初学者が “ディラック方程式” の本質を学ぶために必要十分な内容を吟味して書かれた，書き過ぎていない好書である．本書で触れられなかった進んだ応用は他の本を求めればよいのであって，“ディラック方程式” を知りたいという初学者には，是非手にとって戴きたい一冊と言える．

仲　滋文（日本大学理工学部）

BOOK REVIEW

ホログラフィー原理と量子エンタングルメント



高柳匡著，B5 判，192 頁，本体 2407 円，サイエンス社

ここ数年，ブラックホールの情報パラドックスの問題などを通じて，量子情報理論の方法が徐々に素粒子物理学に浸透しつつある．特に，ホログラフィーとエンタングルメント・エントロピーの方法をあわせて用いることによりいくつかの重要な新しい理論的進展があった．この著作はこうした発展に重要な役割をはたしてきた高柳匡さんが自ら解説を書いたものである．大学院生などに対する格好の入門書であるとともに，研究のフロンティアを垣間見せてくれる優れた解説書になっている．

この本の内容を紹介すると，第 1 章が概観，2, 3 章でエンタングルメント・エントロピーの定義が与えられ，後で必要になるレプリカ法の説明がある．エンタングルメント・エントロピーとは，問題にしている系を領域 A と B の二つの系に分けたときその間の量子もつれ（エンタングルメント）からくるエントロピーである．全系の密度行列 ρ を系 B の自由度についてトレースを取ったものを ρ_A と呼ぶと，ρ_A から求められるフォンノイマン・エントロピー S_A がエンタングルメント・エントロピーを与える．

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\ \rho, \quad S_A = -\mathrm{Tr}_A\ \rho_A \log \rho_A.$$

4 章は共形不変性を持つ場の理論，共形場理論，におけるエンタングルメント・エントロピーの分析にあてられる．特に具体的に計算が実行可能な 2 次元の共形場の理論については詳しい議論がある．5, 6 章でブラックホールとホログラフィー原理，さらに AdS/CFT 対応が導入される．AdS/CFT 対応は反ド・ジッター（AdS）空間上の重力理論とその無限遠の境界上に定義された共形場理論の間の対応関係で，AdS/CFT 対応を用いると共形場理論のエンタングルメント・エントロピーを重力理論を使って評価することができると期待される．この問題が 8 章で議論される．

よく知られた笠・高柳の公式は共形場理論のエンタングルメント・エントロピーを AdS 空間の中の極小曲面の面積で表すもので，

$$S_A = \frac{\gamma_A\text{の面積}}{4G_N}$$

と書かれる．ここで γ_A は領域 A と B の境界を端に持つ AdS 空間内の面積最小の曲面である．G_N は重力理論のニュートン定数．上の関係式はブラックホールで知られるベッケンシュタイン・ホーキングの公式を拡張して提案されたもので，エンタングルメント・エントロピーを重力理論で計算するときに鍵になる式である．一般に共形場の理論でエンタングルメント・エントロピーを求めるのは難しいが，AdS 空間の極小曲面を決めるのは比較的易しいので，上式を用いると左辺を右辺で計算できることになる．この関係式の厳密な証明は難しいがレプリカ法を用いたやり方でおおむね証明されたと考えられている．

以下，9 章は量子クエンチを用いた熱化現象の解析，10 章は AdS/CFT の物性系への応用に触れている．この辺りは最近の研究に直接関連している．

この本全体の記述は平易で分かりやすい．文章が短くテンポが良くて読みやすい．特に，難しい数式はなるべく使わないように配慮されているように見える．また，基本的な関係は繰り返し現れて強調されており教育的な配慮もある．

今後，こうした方向の研究がどれだけ発展してゆくのかは非常に興味深い．弦理論が苦手な時間発展を含む問題，たとえばものを落としてブラックホールが形成される過程を境界上の場の理論でどう記述するかといった問題に有効性を発揮できるだろうか．21 世紀の素粒子論の行く手に大きな影響を与えそうである．

なお，同じサイエンス社刊行の SGC103「量子情報と時空の物理」（堀田昌寛著）も量子情報と時空の物理の関係を議論した好著である．

江口　徹（立教大学理学部）

数論幾何の誕生

Weil 予想から混合モチーフの三角圏へ

山崎 隆雄

1. 序

与えられた多項式 $f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ に対し集合 $X_f(\mathbb{Q}) := \{x \in \mathbb{Q}^m \mid f(x) = 0\}$ を決定するという素朴な問題は，現代でも整数論の中心的な問題である．Fermat の最終定理はこの問題の $f = x_1^d + x_2^d - x_3^d$ $(m = 3,\ d \geq 3)$ という特別な場合にあたるが，Wiles はその解決により 1998 年のフィールズ特別賞を受賞した．Faltings は「代数体上の種数 2 以上の代数曲線の有理点は有限個である」という Mordell 予想を解決し，1986 年のフィールズ賞を受賞した．これは $m = 2$ の場合に広い範囲の f に対して適用できる定理で，例えば任意の有理数 $c \neq 0$ に対して $X_{x_1^2+x_2^5+c}(\mathbb{Q})$ が有限であることが直ちに従うが，この例だけでも Faltings 以前には知られていなかった．有理数体 $\mathbb{Q}$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ に置き換えてこの問題を考えたとき，有限集合 $X_f(\mathbb{F}_q)$ の元の個数について精密な評価を与えるのが Weil 予想であり，その解決に貢献した Grothendieck と Deligne はそれぞれ 1966 年と 1978 年にフィールズ賞を受賞した．

Weil 予想の解決で特徴的なことは，幾何学，特にコホモロジー理論のアイデアが数論に取り入れられていったことである．「数論」と「幾何」は数学の分野としてずいぶん離れているように感じられる．数論は $1, 2, 3, \ldots$ という離散的なものを扱い，幾何では図形のような連続的な形を持つものを扱うからである．ところが，Weil 予想の研究を通してこれらの間に不思議なほど豊かな関係があることが明らかにされてゆき，数論幾何という分野が定着することになった．コホモロジー理論の発展において指導的な役割を果たしたのが Grothendieck により提唱されたモチーフの仮説であり，それは現在でも発展を続けている．2002 年にフィールズ賞を受賞した Voevodsky の重要な業績は，混合モチーフの三角圏を構成したことにあった．本稿では，Weil 予想から混合モチーフの三角圏までの発展の歴史を概説する．

2. Betti コホモロジー

冒頭の設定を少し一般化しておく．基礎体 F を固定して，X を F 上の n 次元代数多様体[*1)]とする．F の拡大体 F' に対し，$X(F')$ で X の F'-有理点全体のなす集合を表す．前節の設定で $F = F' = \mathbb{Q}$ として X を $f = 0$ で定まる（アフィン）多様体とすれば $X(\mathbb{Q}) = X_f(\mathbb{Q})$ となる．

この節では $F \subset \mathbb{C}$ の場合を考える．このとき，

*1) F 上有限型で分離的なスキームの意味．

$X(\mathbb{C})$ は複素解析多様体となるが，その幾何を表す代表的な不変量として，**Betti コホモロジー**

$$H_{\mathrm{B}}^*(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})=\bigoplus_{i=0}^{2n}H_{\mathrm{B}}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$$

がある．これは有限次元次数付き $\mathbb{Q}$-線形空間で，その i 次成分 $H_{\mathrm{B}}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ の次元 $b_i(X)$ を **Betti 数**という．簡単な例を挙げておこう．

例 2.1　$X=\mathbb{P}^n$ のときは次が成り立つ：

$$b_i(\mathbb{P}^n)=\begin{cases}1 & (i\text{ が偶数のとき}),\\ 0 & (i\text{ が奇数のとき}).\end{cases}$$

例 2.2　次数 d の斉次多項式で定義される $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の超曲面 X が滑らかで絶対既約の場合は，$\rho_{n,d}:=(1-\frac{1}{d})[(d-1)^{n+1}+(-1)^n]$ 次元線形空間 U を用いて次のように表せる：

$$H_{\mathrm{B}}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\cong\begin{cases}H_{\mathrm{B}}^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) & (i\neq n),\\ H_{\mathrm{B}}^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\oplus U & (i=n).\end{cases}$$

以下 8 節まで，断りのない限り X は F 上滑らかで射影的，かつ絶対既約と仮定する．すると $b_0(X)=b_{2n}(X)=1$ が成り立つ．Betti コホモロジーについて重要な 2 つの性質を紹介しておこう．

Poincaré 双対性． 標準同型 $H_{\mathrm{B}}^{2n}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ が存在し，$i=0,1,\ldots,2n$ に対し，カップ積

$$H_{\mathrm{B}}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\times H_{\mathrm{B}}^{2n-i}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\to H_{\mathrm{B}}^{2n}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$$

は非退化双線形形式を定める．特に $b_i(X)=b_{2n-i}(X)$ が成り立つ．

Lefschetz 固定点定理． 代数多様体の射 $\psi:X\to X$ の固定点 $X(\mathbb{C})^\psi:=\{x\in X(\mathbb{C})|\psi(x)=x\}$ が有限集合であると仮定する．ψ は次数を保つ線形写像 $\psi^*:H_{\mathrm{B}}^*(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\to H_{\mathrm{B}}^*(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ を引き起こす．そのトレースの交代和

$$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\mathrm{Tr}(\psi^*:H_{\mathrm{B}}^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$$

は $X(\mathbb{C})^\psi$ の元の個数[*2] に一致する．

*2）正確には，ある「重み」を込めて数える．

3. Weil 予想

$F=\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とする．自然数 r に対し，$\mathbb{F}_q$ の r 次拡大体 $\mathbb{F}_{q^r}$ が（同型を除き）ただ一つ存在する．Weil 予想は $X(\mathbb{F}_{q^r})$ の元の個数 $|X(\mathbb{F}_{q^r})|$ が，r とともにどのように変動するかを精密に予言する．

予想 3.1（Weil 予想）　有限個の代数的整数からなる多重集合[*3] の族 $\mathcal{W}^i(X)$ $(i=0,1,\ldots,2n)$ で，以下の性質を持つものが存在する：

(i) すべての自然数 r に対し，次が成り立つ：

$$|X(\mathbb{F}_{q^r})|=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\sum_{\alpha\in\mathcal{W}^i(X)}\alpha^r.$$

(ii) $\mathcal{W}^0(X)=\{1\}$, $\mathcal{W}^{2n}(X)=\{q^n\}$ である．

(iii) 対応 $\alpha\mapsto q^n/\alpha$ は全単射 $\mathcal{W}^i(X)\to\mathcal{W}^{2n-i}(X)$ を定める．

(iv) すべての $\alpha\in\mathcal{W}^i(X)$ に対し次が成り立つ[*4]：

$$|\alpha|=q^{i/2}.$$

(v) X が代数体上の多様体 $\widetilde{X}$ を有限素点で還元することにより得られる場合，$\mathcal{W}^i(X)$ の元の個数 $|\mathcal{W}^i(X)|$ は $b_i(\widetilde{X})$ に[*5] 一致する．

(iv) は X に対する **Riemann 予想**とも呼ばれる．その理由を説明しておこう．素数定理によると，正の実数 x に対し x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ は $\mathrm{li}(x):=\int_2^x(1/\log x)dx$ で近似されるが，（通常の）Riemann 予想はその誤差の評価

$$|\pi(x)-\mathrm{li}(x)|=O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\qquad(x\to\infty)$$

（ϵ は任意の正定数）と同値である．ここで予想 3.1 を振り返ると，(i), (ii), (iv) から

$$\Big||X(\mathbb{F}_{q^r})|-q^{nr}\Big|\le\sum_{i=0}^{2n-1}|\mathcal{W}^i(X)|q^{ir/2}$$

*3）集合の各元に自然数で与えられる重複度を定めたもの．

*4）正確には，任意の体の埋め込み $\iota:\mathbb{Q}(\alpha)\hookrightarrow\mathbb{C}$ に対して $|\iota(\alpha)|=q^{i/2}$ という意味である．

*5）正確には，ここで代数体の $\mathbb{C}$ への埋め込みを取る必要がある．$b_i(\widetilde{X})$ はこの選択によらないことが知られている．

という不等式が得られるが，これは $r \to \infty$ において $|X(\mathbb{F}_{q^r})|$ が q^{nr} で近似され，その誤差が $O(q^{(n-\frac{1}{2})r})$ で評価されていると読むことができる．なお，通常の Riemann 予想は Riemann ゼータ関数の零点に関する予想であるが，Weil 予想も X のゼータ関数に関する予想として定式化されることが多い．その場合，(iv) は X のゼータ関数の零点と極の位置に関する主張となる．

4. Weil コホモロジー

Weil は予想 3.1 を $n = 1$ のときに証明し，$n > 1$ の場合にも予想が成り立つ非自明な例を数多く挙げた（アーベル多様体，Fermat 超曲面，有理曲面など）．さらに重要な点は，次のような解釈を与えたことにある[7]．X の Frobenius 射を $\phi: X \to X$ とする．$\overline{\mathbb{F}}_q$ を $\mathbb{F}_q$ の代数閉包とすると $\phi: X(\overline{\mathbb{F}}_q) \to X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ は各座標を q 乗する写像である．$a \in \overline{\mathbb{F}}_q$ に対し $a \in \mathbb{F}_q$ と $a^q = a$ が同値であることを思い出すと，ϕ を r 回合成した写像 $\phi^r: X(\overline{\mathbb{F}}_q) \to X(\overline{\mathbb{F}}_q)$ の固定点全体の集合は $X(\mathbb{F}_{q^r})$ に一致することが分かる：

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = \{x \in X(\overline{\mathbb{F}}_q) \mid \phi^r(x) = x\}.$$

2節で述べた Lefschetz 固定点定理では，固定点の個数が Betti コホモロジーを用いて表された．それは基礎体 F が $\mathbb{C}$ の部分体の場合にのみに適用できる定理であり，F が $\mathbb{F}_q$ のように正標数の体の場合は適用できない．しかし，Betti コホモロジーと同じような性質を持つコホモロジー $H^*(X)$ が $\mathbb{F}_q$ 上の多様体に対しても定義できたらどうであろうか．ϕ^r が $H^*(X)$ の線形写像を引き起こし，そのトレースの交代和が $|X(\mathbb{F}_{q^r})|$ に一致するという Lefschetz 固定点定理が成り立つのであれば，線形写像 $\phi^*: H^i(X) \to H^i(X)$ の固有値全体の多重集合を $\mathcal{W}^i(X)$ とすることで Weil 予想の (i) が従う．(ii) は $H^0(X)$ と $H^{2n}(X)$ がどちらも1次元で，ϕ が誘導する線形写像はそれぞれ1倍および q^n 倍で与えられると読み直せる．すると (iii) も Poincaré 双対性により自然に解釈される．(iv) と (v) については後で述べる．

例 4.1　$X = \mathbb{P}^n$ の場合，例 2.1 と Weil 予想 (v) により，i が奇数なら $H^i(\mathbb{P}^n) = \{0\}$ で，i が偶数なら $H^i(\mathbb{P}^n)$ は1次元となる．ϕ^* が $H^i(\mathbb{P}^n)$ に $q^{i/2}$ 倍で作用すると考えれば

$$\mathcal{W}^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \{q^{i/2}\} & (i\text{ が偶数のとき}), \\ \emptyset & (i\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．すると (i) は

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_{q^r}) = \sum_{i=0}^{n} q^{ir}$$

を意味するが，これは左辺を直接計算することにより簡単に確認できる．

例 4.2　$X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を次数 d の超曲面 X とする．このとき予想 (v) の仮定が成り立つので，例 2.2 により $i \neq n$ ならば $\mathcal{W}^i(X) = \mathcal{W}^i(\mathbb{P}^n)$ である．$\mathcal{W}^n(X)$ は $\mathcal{W}^n(\mathbb{P}^n)$ の他に $\rho_{n,d}$ 個の元を含むが，その値は X に依存して変動する．その場合も，Weil 予想 (i), (iv)（と例 4.1）によって次の不等式が得られる：

$$\left| |X(\mathbb{F}_{q^r})| - \sum_{i=0}^{n} q^{ir} \right| \leq \rho_{n,d} q^{nr/2}.$$

上で「Betti コホモロジーと同じような性質を持つコホモロジー」と述べた点を，もう少しだけ明確にしておこう．F は任意の体，K は標数0の体とする．SmProj$/F$ を F 上の滑らかで射影的な代数多様体の圏，GrVec$/K$ を K 上の有限次元次数付き線形空間の圏とする．**Weil コホモロジー**とは，反変関手

$$H^*: \mathrm{SmProj}/F \to \mathrm{GrVec}/K \qquad (1)$$

でしかるべき条件*6)を満たすものとして定義される．この条件は Poincaré 双対性を含み，Lefschetz 固定点定理を導く．$F = \mathbb{F}_q$ の場合に Weil コホモロジーの存在を証明できれば Weil 予想の (i)–(iii) が従う．ここで K は標数0ならどんな体でもよいが，F が正標数の場合 $K = \mathbb{Q}$ としたのでは

*6)　ここでは Kleiman[3] の定義を用いる．強 Lefschetz 定理などは条件に含まれない．

Weil コホモロジーは存在し得ないということがSerre によって指摘されている．

F が $\mathbb{C}$ の部分体の場合，Betti コホモロジーはWeil コホモロジーになる[*7]．また，F の標数が 0 の場合は de Rham コホモロジー $H^*_{\mathrm{dR}}(X/F)$ という別の Weil コホモロジーも存在する．

5. ℓ 進エタールコホモロジー

Grothendieck は多くの協力者とともに**ℓ 進エタールコホモロジー**の理論を構築した．これにより，任意の体 F に対して，その標数と異なる素数 ℓ を一つ固定するごとに Weil コホモロジー H^*_ℓ が構成される．係数体 K は ℓ 進数体 $\mathbb{Q}_\ell$ である．前節で述べた通り，これにより Weil 予想 (i)–(iii) が証明される．なお，Grothendieck は全く別の原理に基づくクリスタリン・コホモロジーのアイデアも提出している．これは Berthelot により実現された．

ℓ 進エタールコホモロジーの理論は Weil コホモロジーを構成した以上の柔軟性を持つ．まず，SmProj/F の対象に限らない，非常に広い範囲のスキーム S に対して $\mathbb{Q}_\ell$-線形空間 $H^*_{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}_\ell)$ が定義される（ただし，ℓ は S で可逆である必要がある．また，$H^*_{\text{ét}}(S, \mathbb{Q}_\ell)$ は有限次元とは限らない）．$\overline{F}$ を F の分離閉包とすると，$X \in \mathrm{SmProj}/F$ に対して $H^*_\ell(X) := H^*_{\text{ét}}(X \times_F \overline{F}, \mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上有限次元となり，

$$H^*_\ell : \mathrm{SmProj}/F \to \mathrm{GrVec}/\mathbb{Q}_\ell$$

は Weil コホモロジーとなる．この構成の大きな利点は，線形空間 $H^*_\ell(X)$ への $G_F := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の連続な作用が自然に得られることである．すなわち，$H^*_\ell(X)$ は G_F の表現という豊富な構造を持つことになる．この表現 $H^*_\ell(X)$ は大変有用で，例えば冒頭で触れた Wiles の仕事は X が $F = \mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合に $G_\mathbb{Q}$ の表現 $H^1_\ell(X)$ を精査して得られたものである．

*7) この場合 $K = \mathbb{Q}$ である．また，下の de Rham コホモロジーについては $K = F$ となる．

F が $\mathbb{C}$ の部分体のとき，Artin の比較同型

$$H^*_\ell(X) \cong H^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_l \tag{2}$$

が存在する．Weil 予想の (v) で述べた状況では

$$H^*_\ell(\widetilde{X}) \cong H^*_\ell(X) \tag{3}$$

という同型も存在する．これらを併せると Weil 予想 (v) が得られる．

残された Weil 予想 (iv) は，これらよりもはるかに深い難問で，Deligne によって解決されるまでさらに 10 年近くかかった．その方法は，幾何的なアイデア（Lefschetz ペンシルのモノドロミー）や保型形式のアイデア（Rankin の方法）などを組み合わせた鮮やかなものであったが，Grothendieck が予見していた方法（次の節で説明する）とは異なるものだったため，同時代の数学者には大きな驚きを持って迎えられたようである．

6. モチーフ

これまでの議論により任意の基礎体 F について Weil コホモロジーが存在することが分かった．しかもたくさんの Weil コホモロジーが存在するのである．これらは全く異なる方法で構成されているのだが，不思議なことに相互に密接な関係がある．例えば F が $\mathbb{C}$ の部分体のとき，ℓ 進エタールコホモロジーと Betti コホモロジーの比較同型が (2) に現れたが，Betti コホモロジーと de Rham コホモロジーの間にも比較同型

$$H^*_{\mathrm{B}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} \cong H^*_{\mathrm{dR}}(X/F) \otimes_F \mathbb{C}$$

が存在する．また，$F = \mathbb{F}_q$ のときは，標数と異なる素数 ℓ を選んでおいて，$\phi^* : H^i_\ell(X) \to H^i_\ell(X)$ の固有値全体からなる多重集合を $\mathcal{W}^i(X)$ と定めると上で述べたが，この定義では $\mathcal{W}^i(X)$ が ℓ の選択に依存してしまう．ところが，実際には $\mathcal{W}^i(X)$ は ℓ に依らないということが Deligne により（Weil 予想と同時に）示されている．

このような現象を説明するために，Grothendieck は**モチーフ**という仮説を提唱した．F 上のモチーフの圏と呼ばれる半単純なアーベル圏 $M(F)$ と反変関手

$$\mathcal{H}: \mathrm{SmProj}/F \to M(F) \tag{4}$$

が存在して，すべての Weil コホモロジー (1) はある共変関手

$$R_{H^*}: M(F) \to \mathrm{GrVec}/K$$

を用いて $H^* = R_{H^*} \circ \mathcal{H}$ と表せるだろうと考えたのである．R_{H^*} を**実現関手**という．すなわち，モチーフはすべての Weil コホモロジーを統制する普遍的なコホモロジー理論である．$M(F)$ は GrVec/K のように線形空間の圏に付加構造を入れたものとして構成できるとは期待できず，もっと抽象的な圏を想定している．

Grothendieck は $M(F)$ の候補をいくつか構成した．そのうちの一つは後に Jannsen により半単純アーベル圏であることが確かめられた（以下ではこの圏を $M(F)$ と書く）．しかしながら，Weil コホモロジーが (4) を経由することは分かっていない．それは Grothendieck が**標準予想**[3] と呼んだ一連の予想の一部であり，現在でも未解決である．また，Grothendieck は Weil 予想 (iv) が標準予想から従うことを指摘した．標準予想を解決することで，Weil 予想 (iv) も同時に証明されるというのが Grothendieck のプログラムであった．標準予想は 2014 年現在でもほとんど進展がないことを考えると，Deligne による Weil 予想の解決は一段と輝いて見える．なお，Voevodsky は標準予想（のうち上で述べた部分）への新しいアプローチとして smash-nilpotence 予想を提案している[8]．

7. Tate 予想と Mordell 予想

Faltings による Mordell 予想の解決は冒頭で触れた．そこでは代数体上のアーベル多様体に対する Tate 予想も証明されていて，Mordell 予想の証明ではその結果が利用されている．ここで Tate 予想について説明しておこう．

A を体 F 上のアーベル多様体として，F の標数と異なる素数 ℓ を固定する．すると，5 節で説明したとおり，$H^1_\ell(A)$ は G_F の連続な作用を持つ有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$-線形空間となる．アーベル多様体としての自己準同型 $\psi: A \to A$ が与えられると，G_F の作用と両立する線形写像 $\psi^*: H^1_\ell(A) \to H^1_\ell(A)$ が誘導される．逆に，G_F の作用と両立する任意の線形写像 $H^1_\ell(A) \to H^1_\ell(A)$ は，アーベル多様体の自己準同型が誘導するものの $\mathbb{Q}_\ell$ 係数の線形結合として表せるだろうか．Tate 予想は，F が有限体や代数体の場合[*8] にはそれが成り立つと主張する．Tate は F が有限体の場合，Faltings は F が代数体の場合にこの予想を解決した．

Tate 予想はアーベル多様体に限らず一般の多様体に対しても定式化されるが，それは現在でも未解決である．標準予想を認めると，実現関手 $R_{H^*_\ell}$ によって $M(F)$ から G_F の $\mathbb{Q}_\ell$-線形表現の圏への共変関手が得られるが，一般の Tate 予想はこの関手[*9] が充満忠実であることを述べている．

F が代数体の場合，Faltings による Tate 予想の証明と，そこから Mordell 予想を導く議論の両方で中心的な役割を担うのが**高さ**の理論である．最近，加藤[2] により高さの理論をアーベル多様体からモチーフに一般化する提案がなされている．そこではモチーフに対し高さが定義されていて，「高さが有界のモチーフ（の同型類）の集合は有限である」という予想が提出されている．この予想は一般の Tate 予想を導くという．

8. 代数的 K 理論

1978 年，Deligne と同時にフィールズ賞を受賞した Quillen の重要な業績に代数的 K 群 $K_*(X)$ の構成がある．この仕事は整数論にも大きなインパクトがあった．特に，いくつかの X に対して $K_*(X)$ を用いてゼータ関数の特殊値が記述されたことは著しい．Borel は代数体 F に対して $K_*(\mathrm{Spec}\, F)$ 上で定義されたレギュレーター写像を構成し，それによって Dedekind ゼータ関数の特殊値を記述した．Bloch は X が代数体上の楕円曲線のときに $K_1(X)$ を用いて類似の結果を得た．

---

*8)　より一般に，素体上有限生成な体．

*9)　正確には，$M(F)$ の係数を $\mathbb{Q}_\ell$ に拡大する必要がある．

代数的 K 群はモチーフ論においても決定的な意義がある．前節まで X は F 上滑らかで射影的なものだけを考えてきたが，上で触れたように Betti コホモロジーや ℓ 進エタールコホモロジーはこの仮定を満たさない X に対しても定義される．すなわち，これらは F 上の代数多様体全体の圏 Sch/F で定義されたコホモロジー理論を与えるのである．このような理論を，ここでは仮に拡張されたコホモロジー理論*10)と呼ぶことにしよう．Chern 類の理論によると，Quillen の K 群 $K_*(X)$ は，上で述べたような意味での拡張されたコホモロジー理論について普遍的な理論を与える．すなわち，任意の拡張されたコホモロジー理論 H^* に対し，（しかるべき性質を満たす）自然変換 $K_* \to H^*$ が存在するのである．

9. 混合モチーフとその三角圏

モチーフの圏 $M(F)$ は F 上滑らかで射影的な多様体のみを扱う理論であった．それをすべての（滑らかとも射影的とも限らない）代数多様体を扱えるように拡張する試みが，Grothendieck, Deligne, Bloch, Beilinson などにより展開されてゆき，**混合モチーフ**の仮説として結実した．そのような研究を促した背景には，前節で説明した代数的 K 群の理論の他，Deligne による混合 Hodge 構造の理論および ℓ 進コホモロジーの重さの理論があった*11)．

この仮説の概略は次の通りである．F 上の混合モチーフの圏と呼ばれる圏 $MM(F)$ と反変関手

$$\widetilde{\mathcal{H}}: \mathrm{Sch}/F \to MM(F)$$

で，拡張されたコホモロジー理論について普遍的なものが存在する．$MM(F)$ は $M(F)$ を部分圏として含む．$MM(F)$ はアーベル圏であるが，$M(F)$ と違い一般には半単純ではない．つまり非自明な拡大群を持ち得るのであるが，$MM(F)$ の対象はすべて，$M(F)$ の対象の拡大を繰り返すことで得られる（これは混合 Hodge 構造や ℓ 進エタールコホモロジーの重さの理論から予見される）．また，代数的 K 群 $K_*(X)$*12)はこの拡大群によって記述できる．さらに，Betti コホモロジーや ℓ 進エタールコホモロジーを前節で述べた意味で拡張されたコホモロジー理論と見るとき，それは（$MM(F)$ まで拡張された）実現関手と $\widetilde{\mathcal{H}}$ の合成として表される．最後に，レギュレーター写像はこの実現関手が誘導する写像として解釈される．

混合モチーフは希有壮大な仮説であるが，残念ながら現在でも $MM(F)$ は構成されていない．しかしながら，Voevodsky は $MM(F)$ の三角圏版にあたる圏 $DM(F)$ を構成した．これは $MM(F)$ ほどの情報は持っていないが，それでも $MM(F)$ のコホモロジー理論を展開する上では十分な情報を残した圏となっている（$DM(F)$ はもはやアーベル圏ではなく，三角圏と呼ばれる種類の圏になる．$DM(F)$ に t-構造という付加構造を構成できれば，そのハートとして $MM(F)$ が取り出せる）．$MM(F)$ がなくても $DM(F)$ があれば十分となることも多く，実際 $DM(F)$ を用いて多くの具体的な成果が得られている．次節ではその一端を述べる．なお，$DM(F)$ は Levine と花村も独立に構成を与えており，しかも 3 つの圏はすべて同値となることも確認されている．

10. Milnor 予想

前節で述べた $DM(F)$ はかなり抽象的なものであったが，Voevodsky はこの圏を利用して多くの具体的な結果を証明している．特に重要なのが Bloch–加藤予想の証明であるが，ここではその応用として証明された Milnor 予想を紹介しよう．

F を標数が 2 でない体とする．F 上の有限次元線形空間 V と非退化双線形写像 $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to F$ の組を F 上の**二次形式**と呼ぶ．2 つの二次形式の

*10) これには Weil コホモロジーよりずっと複雑な定式化が必要となる．例えば，コホモロジーの次数の他に Tate ひねりや Adams 作用素に由来する別の次数づけも必要になる．詳しくは Beilinson[1] を参照のこと．

*11) Bloch による代数的サイクルの研究も重要である．

*12) 正確には $K_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ である．ねじれ部分については微妙な問題がある．

直和とテンソル積は自然に二次形式となる．あとで必要になる例を 2 つあげておく：

(i) $a \in F^\times$ とする．1 次元線形空間 F に，$\langle x, y\rangle = axy$ として非退化双線形写像を与えた二次形式を F_a と書く．

(ii) F^2 に，非退化双線形写像を

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_2 + x_2y_1$$

と定めた二次形式を E と書く．

F 上の二次形式を分類するために，次の定義を導入する．F の **Witt 環** $W(F)$ は，二次形式の同型類全体で生成される自由アーベル群を，

$$[V \oplus V'] - [V] - [V'], \quad [E]$$

(V, V' は二次形式，$[V]$ は V の同型類）で生成される部分群で割った剰余群として定義される．$a \in F^\times$ に対し $\langle a\rangle := [F_a]$ と書く．$W(F)$ はテンソル積により定まる積により可換環となる．単位元は $1 := \langle 1\rangle$ である．偶数次元の二次形式の類全体は $W(F)$ のイデアルとなる．これを $I(F)$ と書く．Arason と Pfister により $\bigcap_{r=0}^{\infty} I(F)^r = \{0\}$ が示されているため，すべての $r \geq 0$ に対し $I(F)^r/I(F)^{r+1}$ の構造を決定できれば F 上の二次形式全体の構造がだいたい分かることになる．以下では $I(F)^r/I(F)^{r+1}$ を明示的な生成元と関係式で定義される群で記述する．

体 F の乗法群 $F^\times$ のテンソル代数 $T_*(F^\times)$ を考える．これは次数付き可換環で，その次数 r の成分 $T_r(F^\times)$ は $F^\times$ の r 回テンソル積 $(F^\times)^{\otimes r}$ で与えられる．$a \in F^\times$ が 1 と異なる元全体を走るときに $a \otimes (1-a) \in T_2(F^\times)$ の形の元全体で生成される $T_*(F^\times)$ の両側イデアルを $\mathcal{J}$ とし，剰余環 $T_*(F^\times)/\mathcal{J}$ の次数 r の成分を r 次の **Milnor** K **群**とよび $K_r^M(F)$ と書く．この群は明示的な生成元と関係式で定義されていることに注意しよう．$a_1, \ldots, a_r \in F^\times$ に対し，$a_1 \otimes \cdots \otimes a_r$ の類を $\{a_1, \ldots, a_r\}$ と書く．

準同型写像

$$\alpha : K_r^M(F) \to I(F)^r/I(F)^{r+1}$$

が $\alpha(\{a_1, \ldots, a_r\}) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \langle a_i\rangle)$ によって定まる．Milnor は次の定理の $r \leq 2$ の場合を証明し，一般の r についても成立すると予想した[5]．

定理 10.1（Orlov, Vishik, Voevodsky[4, 6]）任意の $r \geq 0$ に対し，α は次の同型を誘導する：

$$K_r^M(F)/2K_r^M(F) \cong I(F)^r/I(F)^{r+1}.$$

11. 結び

350 年の長きにわたり数学者を悩ませ続けた Fermat 予想を筆頭に，Weil 予想，Mordell 予想，Milnor 予想など何十年も未解決だった問題群が 20 世紀後半に解決されていった．その歴史は壮観である．一方，標準予想，一般の Tate 予想，$MM(F)$ の構成など，残された重要問題も多い．21 世紀には，次世代の数学者がこれらの問題にどう取り組むのか，またどのような新しい問題が提出されてゆくのだろうか．楽しみである．

参考文献

1) A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, *J. Soviet Math.* **30**, 2036–2070, (1985).
2) K. Kato, Heights of motives, *Proc. Japan Acad.*, **90**, Ser. A (2014), 49–53.
3) S.L. Kleiman, Algebraic cycles and the Weil conjectures. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, pp.359–386, North-Holland, 1968.
4) A. Merkurjev, Developments in algebraic K-theory and quadratic forms after the work of Milnor, *Collected papers of John Milnor, V: Algebra*, pp.399–418, American Mathematical Society, 2010.
5) J. Milnor, Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1969/1970), 318–344.
6) D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky, An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms, *Ann. Math.* **165** (2007), 1–13.
7) A. Weil, Abstract versus classical algebraic geometry, *Proc. Internat. Cong. Math.* (Amsterdam, 1954), Vol.III, 550–558, 1956.
8) V. Voevodsky, A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero, *Int. Mat. Res. Notices* **4** (1995), 1–12.

（やまざき・たかお，東北大学大学院理学研究科）

微分方程式を考える

第6回

数学は現象をいかに記述しているか

ニュートンの運動方程式の初期値問題の大域解 (1)

小澤 徹

微分方程式の初期値問題の大域解に関する基礎理論をニュートンの運動方程式に適用して一般論を与えるとともに，具体的な力場を取り上げ，一般論では扱えない場合を個別に議論する．

6.1 ニュートンの運動方程式に対する初期値問題の解の存在と一意性

X を実バナッハ空間とする．連続写像 $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は次の局所リプシッツ条件を満たすものとする：

単調増加関数 $L : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $\rho > 0$ に対し $L(\rho) > 0$ であり任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ および $x, y, v, w \in \overline{B(0;\rho)}$ に対し不等式

$$\|F(t,x,v) - F(t,y,w)\| \leq L(\rho)(\|x-y\| + \|v-w\|) \qquad (\mathrm{L_{loc}})$$

が成り立つ．ここに $\overline{B(0;\rho)} = \{x \in X; \|x\| \leq \rho\}$ とする．

初期時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ において初期状態 $(x_0, v_0) \in X \times X$ を取り，力の場 F の下での時刻 t における状態 $(x(t), x'(t))$ はニュートンの運動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \\ (x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \end{cases} \qquad (6.1)$$

の解により記述される．以下，簡単のために $t_0 = 0$ とし $t \geq t_0 = 0$ とする．

定理 6.1（**極大解の存在と一意性**） 連続な力の場 $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(\mathrm{L_{loc}})$ を満たすものとする．このとき任意の $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し $T^* \in (0, \infty]$ が存在し，(6.1) は唯一つの解 $x \in C^2([0, T^*); X)$ を持つ．さらに次のどちらか一方が成り立つ．

(i) $T^* = \infty$.
(ii) $T^* < \infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T^*}(\|x(t)\| + \|x'(t)\|) = \infty$.

(証明)　問題を積バナッハ空間 $X \times X$ における微分方程式

$$\frac{d}{dt}(x(t), v(t)) = (v(t), F(t, x(t), v(t)))$$

の初期値問題として捉え，積分方程式

$$(x(t), v(t)) = (x_0, v_0) + \int_0^t (v(t'), F(t', x(t'), v(t')))dt'$$

の形で議論すれば良い．

大域解の存在を保障するための F の条件として一次増大条件を考えよう：

局所可積分関数 $M : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ および $x, v \in X$ に対し不等式

$$\|F(t, x, v)\| \leq M(t)(\|x\| + \|v\| + 1) \tag{LG}$$

が成り立つ．

定理 6.2（大域解の存在 I）　連続な力の場 $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(\mathrm{L_{loc}})$ および (LG) を満たすものとする．このとき任意の $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し定理 6.1 で与えられる T^* は $T^* = \infty$ である．

(証明)　グロンウォールの補題を用いて解の先験評価が得られるので定理 6.1 の (ii) は成立しないことが分かる．

X が内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間の場合に条件 (LG) は次のように弱められる：

局所可積分関数 $M : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ および $x, v \in X$ に対し不等式

$$(v|F(t, x, v)) \leq M(t)(\|x\|^2 + \|v\|^2 + 1) \tag{LG$'$}$$

が成り立つ．

定理 6.3（大域解の存在 II）　X は実ヒルベルト空間とし，連続な力の場 $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(\mathrm{L_{loc}})$ および (LG$'$) を満たすものとする．このとき任意の $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し定理 6.1 の T^* は $T^* = \infty$ である．

(証明)　任意の $t \in (0, T^*)$ に対して成り立つ微分不等式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2 + \|x'(t)\|^2 + 1) = 2(x'(t)|x(t)) + 2(x''(t)|x'(t)) \\
&= 2(x'(t)|x(t)) + 2(F(t, x(t), x'(t))|x'(t)) \\
&\leq (2M(t) + 1)(\|x(t)\|^2 + \|x'(t)\|^2 + 1)
\end{aligned}$$

を積分すれば解の先験評価が得られ，定理 6.1 の (ii) は成立しないことが分かる．

定理 6.2 および 6.3 は，前回導入した対数型補正を施してもそのまま成立する[2)]．

6.2 集中型自己相互作用場の下での古典軌道

H を内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間とする．$p \geq 1$ および $x_0, v_0 \in H$ に対し次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} x''(t) = \|x(t)\|^{p-1}x(t), \quad t > 0, \\ (x(0), x'(0)) = (x_0, v_0). \end{cases} \tag{E_+^p}$$

$p = 1$ の場合，解は $x(t) = (\cosh t)x_0 + (\sinh t)v_0$ と具体的表示を持ち，x_0 と v_0 の張る平面で双曲線を描く．そこで以下では $p > 1$ の場合を考える．前節の定理 6.1 により $T^* \in (0, \infty]$ が存在し $x \in C^2([0, T^*); H)$ なる解の存在と一意性が従う．ここに $T^* = \infty$ であるかまたは $T^* < \infty$ かつ $\lim_{t \uparrow T^*} (\|x(t)\| + \|x'(t)\|) = \infty$ のどちらか一方が成り立っている．以下 $t \in [0, T^*)$ として議論する．エネルギーを

$$E(t) = \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} \tag{6.2}$$

と定義すると，等式

$$E'(t) = (x''(t)|x'(t)) - \|x(t)\|^{p-1}(x'(t)|x(t))$$
$$= (x''(t) - \|x(t)\|^{p-1}x(t)|x'(t)) = 0$$

により，保存量となることが分かる：

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x_0\|^{p+1}. \tag{6.3}$$

エネルギーは運動エネルギー（kinetic energy）$\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2$ とポテンシャルエネルギー（potential energy）$-\frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1}$ からなり，両者共に発散して行く可能性があるので，非線型シュレディンガー方程式の爆発解にちなんで (E_+^p) の自己相互作用を集中型（focusing case）と呼ぶことにする．非線型シュレディンガー方程式の爆発解は，レーザーの自己集束やプラズマの崩壊現象を記述する[3, 4)]．

さて，時刻 t における位置ベクトルの長さの自乗を $\varphi(t) = \|x(t)\|^2$ と表すことにより関数 $\varphi : [0, T^*) \to \mathbb{R}$ が定まる．φ を時間変数について微分すると

$$\varphi'(t) = 2(x'(t)|x(t)),$$
$$\varphi''(t) = 2(x''(t)|x(t)) + 2\|x'(t)\|^2$$
$$= 2(\|x(t)\|^{p-1}x(t)|x(t)) + 4E(t) + \frac{4}{p+1}\|x(t)\|^{p+1}$$

$$= \frac{2(p+3)}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} + 4E(0)$$

を得るので φ は微分方程式

$$\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} + 4E(0) \tag{6.4}$$

を満たすことが分かる．このとき，等式

$$\left((\varphi')^2 - \frac{8}{p+1}\varphi^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi\right)' = 2\varphi'\left(\varphi'' - \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi^{\frac{p+1}{2}} - 4E(0)\right) = 0$$

を積分すれば保存則

$$\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(t) = \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0) \tag{6.5}$$

が得られる．右辺はコーシー・シュワルツの不等式により非正である：

$$\begin{aligned}
&\varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0) \\
&= 4(x'(0)|x(0))^2 - \frac{8}{p+1}\|x(0)\|^{p+3} - \left(4\|x'(0)\|^2 - \frac{8}{p+1}\|x(0)\|^{p+1}\right)\|x(0)\|^2 \\
&= 4(v_0|x_0)^2 - 4\|v_0\|^2\|x_0\|^2 \le 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

また φ は微分方程式 (6.4) を積分することにより等式

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \varphi'(0) + \int_0^t \varphi''(s)ds \\
&= \varphi'(0) + 4E(0)t + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_0^t \varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + 2E(0)t^2 + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_0^t (t-s)\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds$$

を満たしていることが分かる．

微分方程式の初期値問題 (E_+^p) に関する基本的結果を纏めておこう：

定理 6.4　$p > 1$ に対し微分方程式の初期値問題 (E_+^p) が時間大域解を持つ（即ち $T^* = \infty$）ための必要十分条件は

$$v_0 = -\sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}x_0 \tag{6.8}$$

である．このとき $x_0 = 0$（従って $v_0 = 0$）ならば解 x は恒等的に零であり $x_0 \neq 0$（従って $v_0 \neq 0$）ならば $t \ge 0$ に対し次の等式が成り立つ：

$$\|x(t)\| = \left(\|x_0\|^{-\frac{p-1}{2}} + \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}t\right)^{-\frac{2}{p-1}}, \tag{6.9}$$

$$\|x'(t)\| = \left(\|v_0\|^{-\frac{p-1}{p+1}} + \frac{p-1}{2}\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}t\right)^{-\frac{p+1}{p-1}}. \tag{6.10}$$

註. (6.8) の拘束条件を満たす初期状態に限り大域解は存在し，$(0,0)$ でなければ無限時間を掛けて $(0,0)$ に収束する現象を記述しているのが (6.9) と (6.10) である．

（証明） **1.** $(x_0, v_0) = (0,0)$ **の場合：**

解の一意性により零解が唯一の (E_+^p) の解となる．

2. $x_0 \neq 0,\ v_0 = -\sqrt{\dfrac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}x_0$ **の場合：**

解を $x \in C^2([0,T^*);H)$ と表す．$E(0) = \dfrac{1}{2}\|x_0\|^2 - \dfrac{1}{p+1}\|v_0\|^2 = 0$ ゆえ任意の $t \in [0,T^*)$ に対し等式

$$\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 = \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} \tag{6.11}$$

が成り立つ．また $\varphi(t) = \|x(t)\|^2$ は任意の $t \in [0,T^*)$ に対し微分方程式

$$\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \tag{6.12}$$

および保存則

$$\begin{aligned}&\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} = \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}\\ =\ & 4(v_0|x_0)^2 - 4\|v_0\|^2\|x_0\|^2 = 0\end{aligned} \tag{6.13}$$

を満たしていることが分かる．さらに

$$\varphi'(0) = 2(v_0|x_0) = -2\cdot\sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^2 < 0$$

となっているから $T_0 > 0$ が存在し任意の $t \in [0,T_0]$ に対し $\varphi'(t) < 0$ が成り立つ．ゆえに任意の $t \in [0,T_0]$ に対し

$$\varphi'(t) = -\sqrt{\frac{8}{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}} \tag{6.14}$$

が成り立つ．これより従う等式

$$(\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}})' = -\frac{p-1}{4}\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}-1}\varphi'(t) = \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}$$

を積分し

$$\varphi(t) = \left(\varphi(0)^{-\frac{p-1}{4}} + \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}t\right)^{-\frac{4}{p-1}} \tag{6.15}$$

を得る．さて (6.15) は $[0,T_0]$ で意味を持つばかりでなく (6.12) および (6.14) を $[0,\infty)$ 上満たしている．微分方程式 (6.12) の初期値問題の局所解の一意性により，(6.15) で与えられる φ は (6.12) の一意的な大域解で $\sup_{t\geq 0}\varphi(t) = \varphi(0)$ となっている．よって $\|x(t)\|^2 = \varphi(t)$ および $\|x'(t)\|^2 = \sqrt{\dfrac{2}{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}}$ は $x(t)$ の存在区間上有界となっている．これは解 x の大域的存在 $(T^* = \infty)$ を意味する．さらに (6.15) は (6.9) そのものであり (6.10) は (6.11) および (6.9)

より従う.

そこで以下では (6.8) が成り立たない場合を考える. $T^* = \infty$ として矛盾を導けば定理が従う.

3. $E(0) > 0$ **の場合：**

(6.4) により任意の $t \geq 0$ に対し $\varphi''(t) \geq 4E(0) > 0$ であるから

$$\varphi'(t) \geq \varphi'(0) + 4E(0)t,$$
$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)t + 2E(0)t^2$$

が成り立つ. ゆえに $T_0 > 0$ が存在し任意の $t \geq T_0$ に対し不等式

$$\varphi'(t) \geq 2E(0)t > 0,$$
$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + E(0)t^2 > 0,$$
$$\frac{4}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} + 8E(0)\varphi(t) \geq \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0)$$

が成り立つ. 従って (6.5) により任意の $t \geq T_0$ に対し不等式

$$\varphi'(t)^2 - \frac{4}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} \geq 0 \tag{6.16}$$

が導かれる. $\varphi, \varphi' > 0$ であるから (6.16) は

$$\varphi'(t) \geq \frac{2}{\sqrt{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$$

と同値であり微分不等式

$$(\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}})' = -\frac{p-1}{4}\varphi(t)^{-\frac{p+3}{4}}\varphi'(t) \leq -\frac{p-1}{2\sqrt{p+1}}$$

を区間 $[T_0, t]$ 上積分することにより

$$\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}} \leq \varphi(T_0)^{-\frac{p-1}{4}} - \frac{p-1}{2\sqrt{p+1}}(t - T_0)$$

が得られるが t を充分大きく取れば右辺は負となるので矛盾である.

4. $E(0) = 0,\ \varphi'(0) > 0$ **の場合：**

3 の場合と同様である.

5. $E(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0$ **の場合：**

(6.4) により φ は微分方程式

$$\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \tag{6.17}$$

を満たすので任意の $t \geq 0$ に対し $\varphi''(t) \geq 0$ となる. これより

$$\varphi'(t) \geq \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(t) \geq \varphi(0) \geq 0$$

が従う. 一方 (6.5) より

$$\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} = 8E(0)\varphi(t) + \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0)$$

$$= -\frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} \le 0$$

となるので

$$0 \le \varphi'(t)^2 \le \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}}$$

の平方根を取って

$$0 \le \varphi'(t) \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$$

を得る．これより (6.17) と合わせて

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} &\ge \frac{2(p+3)}{p+1}\left(\frac{\sqrt{p+1}}{2\sqrt{2}}\varphi'(t)\right)^{\frac{4}{p+3}\cdot\frac{p+1}{2}} \\ &= \frac{2(p+3)}{p+1}\left(\frac{p+1}{8}\right)^{\frac{p+1}{p+3}}(\varphi'(t))^{\frac{2(p+1)}{p+3}}\end{aligned}$$

を得る．右辺の $\varphi'(t)$ の指数は $\frac{2(p+1)}{p+3} = 1 + \frac{p-1}{p+3} > 1$ となるから 3 の場合と同じ議論により $\varphi'(t)$ は有限時間で爆発する．従って $\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$ もそうであり矛盾である．

6. $E(0) = 0,\ \varphi'(0) < 0$ **の場合：**

もし $\varphi'(t_0) > 0$ なる $t_0 > 0$ が存在したとすると (6.4) より任意の $t \ge t_0$ に対し

$$\varphi'(t) = \varphi'(t_0) + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds \ge \varphi'(t_0)$$

となり，これより

$$\varphi(t) = \varphi'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\varphi'(s)ds \ge \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0)$$

が従うので 3 の場合と同様の議論により矛盾が導かれる．ゆえに任意の $t \ge 0$ に対し $\varphi'(t) \le 0$ が成り立つ．特に φ は単調減少で下に有界である．一方，方程式 (6.17) より φ' は単調増加であり既に示したように上に有界である．従って $t \to \infty$ における $\varphi(t)$ および $\varphi'(t)$ の極限が存在する．それをそれぞれ $\beta \ge 0$ および $\gamma \le 0$ と表すことにする．

(1) $\beta > 0$ **の場合：**

β の性質により不等式

$$\varphi'(t) = \varphi'(0) + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_{0}^{t}\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds \ge \varphi'(0) + \frac{2(p+3)}{p+1}\beta^{\frac{p+1}{2}}t$$

が成り立つが充分大きな t に対し右辺は正となって矛盾を得る．

(2) $\beta = 0$ **の場合：**

保存則 (6.5)

$$\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} = \varphi'(0) - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}$$

において $t \to \infty$ とすると左辺は γ^2 に収束するが右辺は (6.6) により非正である．ゆえに右辺は 0 であり γ も 0 に等しいことが分かる．これより $(v_0|x_0)^2 = \|v_0\|^2\|x_0\|^2$ が従う．ゆえに $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在し $v_0 = \lambda x_0$ が成り立つ．さらに条件 $\varphi'(0) < 0$ より $\lambda\|x_0\|^2 = (v_0|x_0) = \varphi'(0) < 0$ となるので $\lambda < 0$ である．また $E(0) = 0$ より $0 = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x_0\|^{p+1} = \frac{1}{2}\|x_0\|^2(\lambda^2 - \frac{2}{p+1}\|x_0\|^{p-1})$ が導かれるが $\varphi'(0) < 0$ より $x_0 \neq 0$ となるので $\lambda = \sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}$ を得る．これは (6.8) そのものであり，この議論の大前提に矛盾する．

7. $E(0) < 0$ **の場合：**

(6.5) および (6.6) により

$$0 \leq \varphi'(t)^2 \leq \frac{8}{p+1}(\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} + (p+1)E(0))\varphi(t)$$

を得る．これより

$$\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \geq -(p+1)E(0) > 0$$

を得るので (6.7) より

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\geq \varphi'(0) + 4E(0)t - 2(p+3)E(0)t \\ &= \varphi'(0) - 2(p+1)E(0)t.\end{aligned}$$

さらには

$$\varphi(t) \geq \varphi(0) + \varphi'(0)t - (p+1)E(0)t^2$$

が従う．3 の場合と同様にこれは矛盾を導く．

参考文献

1) 大谷光春,『理工基礎　常微分方程式論』, サイエンス社.
2) H. Brezis, T. Gallouet, Nonlinear Schrödinger evolution equations, *Nonlinear Analysis TMA* **4** (1980), 677–681.
3) R.T. Glassey, On the blowing up solutions to the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equations, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1794–1797.
4) V.E. Zakharov, Collapse of Langmuir waves, *Soviet Phys. JETP* **35** (1972), 908–914.

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

経路積分と量子解析

いかにして量子現象を数理的に扱うか

第6回

量子古典対応 (2)

量子転送行列法

鈴 木 増 雄

6.1 はじめに

量子古典対応[1,2]の解析的な応用の重要な例としては，量子転送行列法[3~5]をあげることができる．これは量子系を古典系に変換して，古典系でよく知られている転送行列法をこの ST 変換された系に適用するというもので，一見平凡な方法に見えるかもしれない．確かに，もとの格子空間（これを実空間と呼ぶ）を転送行列の定義空間とすると，もとの量子系のハミルトニアンが転送行列として現れるだけで，問題は解決されない．ところが後で詳しく述べるように，視点を変えるだけで事態は一変するのである．すなわち，ST 軸（量子軸または虚時間軸とも呼ばれる）方向の空間を転送行列の定義空間とすることにより，無限個の固有値を求める代わりに 1 個の（最大）固有値を求めるだけで，系の自由エネルギーなどの熱力学的な物理量が求まることになる[3]．言うなれば，

「横のものを縦にするだけで新しい道が拓けることもある」

のである．今から約 30 年前に，このアイデアを東大の研究室で説明しても，なかなかこの方法の有効性を実証してみようという院生が現れず，講義などの合間に独りで研究しているうちに時間が過ぎていったが，やがて新しい院生が興味を持ち始め，明るい見通しがついてきて，今も発展し続けている[4~6]．

6.2 量子転送行列法とその有効性

前回に説明した ST 変換[1,2]により，d 次元量子系を $(d+1)$ 次元古典系に変換し，その古典系の ST 軸方向の空間で転送行列 $\mathscr{T}_n$ を定義する[3]．わかり易くするため，図 6.1 のように，1 次元量子スピン系を 2 次元イジングスピン系に変換した例[4]で説明する．

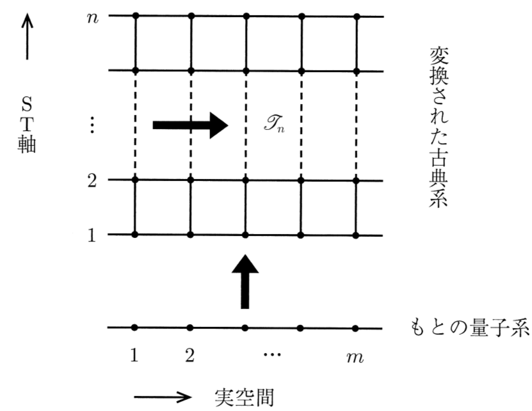


図 6.1　ST 変換された古典系の ST 軸上で定義される量子転送行列.

統計力学において基本的な物理量である状態和 $Z_m(\beta)$ は

$$Z_m(\beta) = \mathrm{Tr}\ \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{H}}; \quad \beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \quad (T \text{ は系の温度}) \tag{6.1}$$

と定義される．ただし，m は系のサイズを表す．

さて，変換された古典系の ST 軸（縦の任意の 1 列）の格子点の情報を右隣に伝える行列として量子転送行列 $\mathscr{T}_n$ が定義される．したがって，左端から右端まで情報を伝える操作は，サイズ m の系では，$\mathscr{T}_n^m$ で表される．系の状態和 (6.1) は，この情報伝達の総和であるから，量子転送行列 $\mathscr{T}_n$ を用いて

$$Z_{m,n}(\beta) = \mathrm{Tr}\ \mathscr{T}_n^m \tag{6.2}$$

の $n \to \infty$ の極限として与えられる．

通常の統計力学の手順では，系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ をまず対角化し，その固有値 $\{E_j\}$ をすべて求め，

$$Z_m(\beta) = \sum_{j=1}^{\mathrm{all}} \mathrm{e}^{-\beta E_j} \tag{6.3}$$

のように，すべての固有値に関する和を求めなければならない．通常は，固有値をすべて求めるのは困難であり，たとえ近似的にでも求まったとしても，それらを式 (6.3) のように指数の肩に乗せて和をとるのも大変である．

これらの事情を踏まえて，式 (6.2) を求める手順について考察する．解析的な手順としては，やはり量子転送行列 $\mathscr{T}_n$ の固有値 $\{\Lambda_j(n)\}$ を求めて

$$Z_{m,n}(\beta) = \sum_{j=1}^{\mathrm{all}} \Lambda_j^m(n) \tag{6.4}$$

のようにすべての固有値 $\{\Lambda_j\}$ に関する和をとることになる．このままでは，横のものを縦にしただけで何のご利益もなさそうに思われるであろう．横のものを縦にもしないものぐさの院生でも一瞬のうちに頭の中でこのくらいのところまでは考える．問題はこの先にある．数学の定義通りの手順では，ST 軸の長さ n をまず ∞ にしてから，熱力学的極限（系のサイズ m を ∞ にする極限）をとることになる．昔，もし，この 2 つの極限を逆にとることが可能だとしたらどうなるであろうかと筆者は考えたところもとの系の相互作用が短距離力のと

きは，この「極限操作交換定理」が，後に示すように，成り立つことがわかった[3]．そこで，この定理に基づいて，まず，熱力学的極限を先にとることにする．状態和 $Z_{m,n}(\beta)$ 自体は ∞ になってしまうので，統計力学では，自由エネルギー（漸近的に格子点の総数 m^d に比例する量—示量的な量）

$$F_m = -k_{\mathrm{B}} T \log Z_m(\beta) \tag{6.5}$$

に対応して，粒子 1 個当りの自由エネルギー（の $-\beta$ 倍）

$$f_{m,n} = \frac{1}{m^d} \log Z_{m,n}(\beta) \tag{6.6}$$

を扱う．その $m \to \infty$ の極限は，図 6.1 の例 $(d=1)$ では

$$\begin{aligned} f_n &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left\{ \Lambda_{\max}^m(n) \left(1 + \sum_{j\neq\max} \left(\frac{\Lambda_j(n)}{\Lambda_{\max}(n)} \right)^m \right) \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \Lambda_{\max}^m(n) = \log \Lambda_{\max}(n) \end{aligned} \tag{6.7}$$

となり，何と最大固有値 $\Lambda_{\max}(n)$ 1 個で自由エネルギーが与えられることになる．これは，式 (6.3) のように無限個の固有値を用いた定式化と比べて大変優れている．量子転送行列の最大固有値を与える状態は，通常は基底状態に対応するので，1 次元量子スピン系の $\Lambda_{\max}(n)$ はベーテ仮設法[7]によって求めることができる．実際，クリュンパー[6]（A. Klümper）は，この量子転送行列法の定式化を用いて $\Lambda_{\max}(\infty)$ に関する閉じた積分方程式を求めることに成功した．ただし，本稿では，その方程式は複雑なので省略する．

6.3 極限操作交換定理[3]

前節で説明した量子転送行列が有効に活用できるのは，次の定理のお陰である．

定理 6.1（極限操作交換定理[3]） 次の 3 つの極限を考える：

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_{m,n} = f, \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_{m,n} = \tilde{f} \tag{6.8}$$

および，2 重極限

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} f_{m,n} = \hat{f}. \tag{6.9}$$

系の相互作用が短距離力であれば，上の 3 つの極限 $f, \tilde{f}, \hat{f}$ はそれぞれ存在し，互いに一致する：

$$f = \tilde{f} = \hat{f}. \tag{6.10}$$

証明[3] 証明の本質は，一般の d 次元でも，また短距離力であれば少し広がりのある力でも同じであるから，ここでは $d=1$ とし，最近接相互作用の場合についてのみ証明していく[3]．次のように証明を 3 つのステップに分けて考える[3]．

ステップ 1：まず，$f_{m,n}$ の $m \to \infty$ に関する一様収束性を証明する．図 6.2 のように，サイズ $m' = 2m$ の系を 2 つに分離し，その間の相互作用の大きさを J とする．

熱力学的極限の存在を証明するとき[8]と同様に，今の問題では ST 変換された

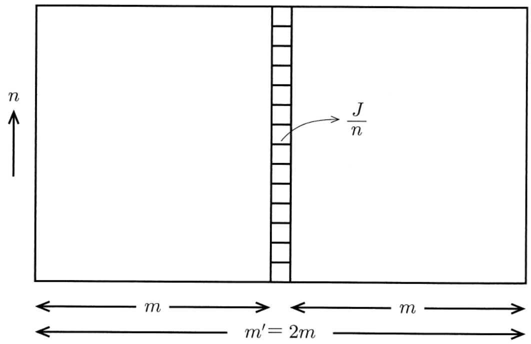


図 6.2　ST 変換された古典系におけるサイズが異なる場合に対する規格化された自由エネルギー（の $-\beta$ 倍）$f_{m,n}$ と $f_{m',n}$ との間の不等式を探す[3)].

古典系の相互作用が実空間方向は $\frac{J}{n}$ になるだけであるから，次の不等式が成り立つことが容易にわかる：

$$|f_{m',n} - f_{m,n}| \le \frac{1}{m'}\frac{|J|}{n}n = \frac{|J|}{m'} = \frac{|J|}{2m}. \tag{6.11}$$

この不等式を p 回繰り返し用いると，サイズ $m'' = 2^p m$ とサイズ m との間の自由エネルギーの間には次の不等式が導ける．すなわち，任意の正の整数 m, n および p に対して次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &|f_{m'',n} - f_{m,n}| \\ &\le |f_{2^p m,n} - f_{2^{p-1}m,n}| + |f_{2^{p-1}m,n} - f_{2^{p-2}m,n}| + \cdots + |f_{2m} - f_m| \\ &\le \frac{|J|}{m}\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2}\right) \le \frac{|J|}{m}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

こうして，n によらず，$N_1 = \frac{|J|}{\varepsilon}$（$\varepsilon$ は任意の正実数）より大きい任意の m, m' に対して次の不等式が成り立つことがわかった：

$$|f_{m,n} - f_{m',n}| < \varepsilon. \tag{6.13}$$

ゆえに，次の一様収束性が示せた：

$$\lim_{m\to\infty} f_{m,n} = \tilde{f}_n \quad (\text{一様}). \tag{6.14}$$

<u>ステップ 2</u>：一方，極限 $n \to \infty$ を先にとると，トロッター公式の収束性に関する不等式[3)]を用いて容易に，次式で定義される f_m が存在する：

$$\lim_{n\to\infty} f_{m,n} \equiv f_m. \tag{6.15}$$

しかも，この $m \to \infty$ の極限 f の存在は通常の熱力学的極限の存在の証明により[10)]保証されている：

$$\lim_{m\to\infty} f_m = f. \tag{6.16}$$

そこで，次に式 (6.14) の右辺 $\tilde{f}_n$ の $\tilde{f}$ への収束および等式 $\tilde{f} = f$ の証明を行う．まず次の補題を紹介する．

補題 6.1　次の 2 つの極限

$$\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \alpha_m \ \ (\text{すべての}\ m\ \text{に対して}),\ \text{および}\ \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha \tag{6.17}$$

が存在して，かつ次の極限

$$\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \beta_n \tag{6.18}$$

が一様収束ならば（n によらず一様に収束するならば），$\{\beta_n\}$ の極限が存在して，それは α に等しい：

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha. \tag{6.19}$$

これを用いると，$\tilde{f}_n$ は $n \to \infty$ で $\tilde{f}$ に収束し，等式 $\tilde{f} = f$ が成り立つことが証明される．

さて，蛇足ではあるが，ついでにこの補題の証明も簡単なので書いておくことにする．式 (6.17) より，m を固定しておくと，任意の正の ε と整数 $n > N_1$ に対して

$$|a_{m,n} - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.20}$$

が成り立つ．また，式 (6.17) の第 2 式より，任意の整数 $m > N_2$ に対して

$$|\alpha_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.21}$$

が成り立つ．同様に $m > N_3$ に対して

$$|a_{m,n} - \beta_n| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.22}$$

が成り立つ．したがって，任意の $n > N_1$ と任意の $m > \max(N_2, N_3)$ に対して

$$|\beta_n - \alpha| < |\beta_n - a_{m,n}| + |a_{m,n} - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha| < \varepsilon \tag{6.23}$$

となり，補題が示せた．

ステップ 3：不等式 (6.23) で，$a_{m,n} = f_{m,n}$, $\beta_n = \tilde{f}_n$, $\alpha = f = \tilde{f}$ とおくと，任意の $m, n > N$ に対して不等式

$$|f_{m,n} - \tilde{f}| \leq |f_{m,n} - \tilde{f}_n| + |\tilde{f}_n - \tilde{f}| < \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon < \frac{4}{3}\varepsilon \tag{6.24}$$

が成り立つから，2 重極限 $\hat{f}$ が存在し，次の重要な等式

$$\hat{f} = \tilde{f} = f \tag{6.25}$$

が証明できた．

この等式の証明を詳しく説明したのは，証明自体に ST 変換の特徴がよく反映されていると同時に，それは量子転送行列の有効性を保証する重要な基礎となる定理を与えるからである[3]．

ついでながら，最大固有値の次の固有値 $\Lambda_{\rm next}$ が求まると，実空間方向のスピン相関関数 $C(R) \equiv \langle \sigma_i^z \sigma_{i+k}^z \rangle$ および相関距離 ξ が次の公式によって与えられる[4]：

$$C(R) \sim \frac{\exp(-\frac{R}{\xi})}{R^{d-2+\eta}} \quad \text{および} \quad \frac{1}{\xi} = -\lim_{n\to\infty} \log\left|\frac{\Lambda_{\rm next}}{\Lambda_{\rm max}}\right|. \tag{6.26}$$

したがって，臨界点や 1 次元基底状態などでは，$\Lambda_{\rm next}$ が $\Lambda_{\rm max}$ と一致し，$\xi \to \infty$ となり，相関関数は巾則にしたがう：

$$C(R) \sim \frac{1}{R^{d-2+\eta}}. \tag{6.27}$$

平均場近似の理論であるオルンシュタイン・ゼルニケ理論からのずれを表す臨

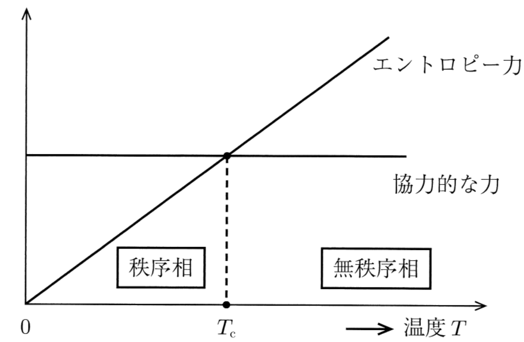


図 6.3　温度によらない協力的な力（相互作用）と（温度と共に大きくなる）エントロピー力が釣り合ったところ T_c で相転移が起こる．

界指数として η がフィッシャーによって導入された．上の ξ の公式を用いて，1 次元スピン系の相関関数が多くの人によって研究されている[4~6)]．

6.4 古典転送行列から量子転送行列への発展史

熱平衡状態での相転移現象などの一般的な協力現象[11)]を扱う際には，協力的な力とその効果を乱す熱的なゆらぎ（エントロピー効果，筆者が 1978 年ブラッセルで開催されたソルベイ会議の講演であえて「エントロピー力」と呼んで以来，プリゴジンら多くの人が，本当は力ではないのに，この名称を使うようになった）の絡み合いが重要である．これら両者の釣り合ったところで図 6.3 のように相転移が起こる[11)]．

秩序相では，いったんどこかでたまたま局所的に秩序（order）ができると，他のところにもこの効果が伝わっていく．ゼルニケは，この現象を

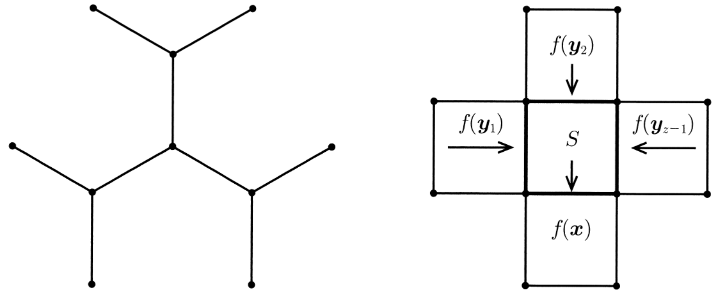
"propagation of order"（秩序の伝ぱん）

として捉えて，相関関数を導入して理論的に議論した．これらは転送行列の方法の萌芽となったと考えられる．ゆらぎも含めた秩序状態が 1 つの列（面）から次の列（面）へと伝ぱんする状況を表す演算子が，とりも直さず，転送行列である[9~11)]．この意味で，転送行列のアイデア[9,10)]は統計力学の問題を情報理論と関連づけて扱う最近の潮流[13)]の草分けと言ってもよいかもしれない．

量子転送行列のアイデア[3~5)]は，この古典系の統計力学の情報的取扱いである転送行列の概念を量子系に拡張したものと位置づけることができる．これからの発展・応用が期待される．

6.5 転送行列法と有効場理論—合流型転送行列の導入

すでに述べた通り，転送行列は統計力学の解析的方法として極めて強力な武器である．この方法が量子系にまで拡張され，量子転送行列として発展しつつある現在，この転送行列法と有効場理論[14)]やくり込み群[15)]との関係[16~18)]にここでふれておくことも有益であろう．これらはまた，相関等式[19,20)]とも深く関係



(a) ケーリートリー（ベーテ格子，$z=3$）　(b) クラスターケーリートリー（$z=4$）

図 6.4　クラスターケーリートリーと合流型転送行列[17)].

している.

要するに，有効場理論[14, 16)]では，着目する以外のスピンや粒子以外の自由度については先に消去してその効果を有効的に着目する自由度に有効場として働きかける．くり込み群の理論[15)]では，有効場を少しずつ漸化的に取り込む．転送行列では，厳密に有効場を構成していく．したがって，1 次元イジング模型のように厳密に解ける系では，上記 3 つの方法はどれも厳密に実行することができ，厳密に解くことが可能となる．すなわち，これら 3 つの方法は，少なくとも 1 次元系では等価である[18)]．それは，1 次元系では，情報の伝わり方が極めて単純だからである．転送行列法でも有効場理論でもくり込み操作でも全く共通のことをやっていることになる.

今までの転送行列法では, 情報の取扱いが線形である．これらを非線形に拡張したものが筆者の提唱した合流型転送行列 (confluent transfer matrix) である[17)]．図 6.4 のように，通常のケーリートリーの各格子点を研究対象とする格子のクラスターに置き換え，着目するクラスター S に接続する辺（または面）$1 \sim (z-1)$ までの状態 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{z-1}$ に対応する分布関数 $f(\boldsymbol{y}_1), f(\boldsymbol{y}_2), \cdots, f(\boldsymbol{y}_{z-1})$ を考える．残りの辺（または面）の分布関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，クラスター S の境界条件 $\{f(\boldsymbol{y}_j)\}$ が与えられたとき，S 面のゆらぎがカノニカル分布（またはボルツマン分布）しているとして，クラスター S に対応する合流型転送行列 $\mathscr{T}$ を用いて

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Tr}_{\{\boldsymbol{y}_j\}} S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{z-1}) f(\boldsymbol{y}_1) \cdots f(\boldsymbol{y}_{z-1}) \equiv \mathscr{T} f(\boldsymbol{y}_1) \cdots f(\boldsymbol{y}_{z-1})$$

の形に与えられる[17)]．この非線形方程式を解くことにより，固有関数 $f(\boldsymbol{x})$ を求めれば，クラスター S に対応するもとの系での，状態 $\boldsymbol{x}$ で指定される任意の物理量 $Q(\boldsymbol{x})$ のカノニカル平均は

$$\langle Q(\boldsymbol{x}) \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\ Q(\boldsymbol{x}) f^2(\boldsymbol{x}) D(\boldsymbol{x})}{\mathrm{Tr}\ f^2(\boldsymbol{x}) D(\boldsymbol{x})} \tag{6.28}$$

で与えられる[17)]．ただし，$D(\boldsymbol{x})$ は状態 $\boldsymbol{x}$ に対するボルツマン因子を表す.

この合流型転送行列の特徴は，その非線形性のために，有限のクラスター S に対しても，ベーテ近似のように相転移が一般に起こる．しかも，クラスター S のサイズを大きくするにつれて，系のゆらぎの効果がますます正しく取り入れられるようになり，相転移点 T_{c} も正しい相転移点 T_{c}^* に近づく．この系統的

な平均場近似列に CAM 理論[16] を適用することにより，非常に精度の高い非古典的な臨界指数が得られる[21]．

この理論で $z=2$ とおくと通常の転送行列になる．こうして，厳密に解ける（本質的に）1 次元的な系では，転送行列法と有効場理論が合流型転送行列の理論を通して等価であることが理解される．また，合流型転送行列の作り方からわかる通り，実空間くり込み操作とも対応していることがわかる．

6.6 おわりに

次回からは，手順の分離と統合について，指数積分解公式の一般論を中心に詳しく解説したい．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載第 5 回，「数理科学」2014 年 12 月号．
2) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** 1454 (1976)，および S. Suzuki, J. Inoue and B.K. Chakrabarti, *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models* (Springer, 2013).
3) M. Suzuki, *Phys. Rev. B***31** 2957 (1985)，および M. Suzuki, *Physica A***321**, 334 (2003).
4) M. Suzuki and M. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 787 (1987)，および M. Inoue and M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **79**, 645 (1988).
5) A. Sugiyama, H. Suzuki and M. Suzuki, *Physica A***353**, 271 (2005).
6) A. Klümper, *Z. Phys. B***91**, 507 (1993).
7) H. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
8) R.B. Griffiths, in *Phase Transition and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M.S. Green (Academic Press, New York, 1972).
9) H.A. Kramers and G.H. Wannier, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941).
10) 久保亮五，物性論研究 **1**, 1 (1943)，および本人による英訳 in Selected Papers of Professor Ryogo Kubo (Syokabo, Tokyo, 1980) edited by M. Suzuki *et al.* この論文は第 2 次戦時中に書かれたものであり，文献 9) とは全く独立に発想されたものである．論文のタイトルも「統計力学における一つの解析的方法」という魅力的なものであって，1 次元イジング模型は 2 行 2 列の行列の対角化で厳密に解けて相転移が有限温度では起こらないことが示されている．2 次元では固有値の縮退が起こり得ると予想し，有限温度での相転移のメカニズムを説明している．1944 年の有名なオンサーガーの厳密解にもう一歩というところまで近づいた記念すべき論文である．日本語の論文のため，外国ではあまり知られていないのは残念である．
11) 鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，2000 年）．
12) F. Zernike, *Physica* **7**, 565 (1940).
13) H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glasses and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000) および西森秀稔，『スピングラス理論と情報統計力学』（岩波書店，1999 年）．
14) H.A. Bethe, *Proc. R. Soc. London A***150**, 552 (1935).
15) K.G. Wilson, *Phys. Rev. B***4**, 3174, 3184 (1971).
16) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 4205 (1986), ibid. **57**, 2310 (1988).
17) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 3642 (1989).
18) 高安亮子，東京理科大学理学研究科物理学専攻修士論文 1204630（指導教員：鈴木増雄）．
19) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **19**, 267 (1965).
20) M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys. B***16**, 1749 (2002).
21) M. Suzuki, M. Katori and X. Hu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 3092 (1987)
22) M. Suzuki and X. Hu, M. Katori, A. Lipouski, N. Hatano, K. Minami and Y. Nonomura, *Coherent Anomaly Method—Mean Field, Fluctuations and Systematics* (World Scientific, Singapore, 1995).

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

特　集（2015年3月号予告）

団代数をめぐって

新たな共通構造の認識

団代数とは何か	中西　知樹
団代数ことはじめ	中西　知樹
団代数と多元環	伊山　修
団代数と結晶基底	中島　俊樹
団代数と標準基底	木村　嘉之
団代数と Y システム	井上　玲
ミューテーションの分配級数	寺嶋　郁二
団代数と完全 WKB 解析	岩木　耕平
団代数と超対称ゲージ理論	山崎　雅人

特　集（2015年1月号）

科学における〈時間〉

ありふれた存在を多角的に捉える

時間　座標と因果性	佐藤　文隆
時間の社会インフラ　暦，標準時と GPS	細川　瑞彦
素粒子実験での時間測定の果たす役割	中平　武
秩序と無秩序を繋ぐ時間　生物の場合	伏見　譲
暗号における時間の有限性・非可逆性　現代暗号から量子暗号へ	林　正人
時空特異点とトポロジー　宇宙の因果	原田　知広 椎野　克
弦理論と時間	土屋　麻人
[コラム] 拡張ミンコフスキー空間での時間	松下　泰雄
[コラム] 量子力学と時間の逆行	筒井　泉

《連載》	例題形式で探求する代数学のエッセンス	その1	小林　正典
	微分方程式を考える	その5	小澤　徹
	例題形式で探求する微積分学の基本定理	その13	森田　茂之

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

物理学の様々な分野はお互いにつながっており，相互に関連し合っていることがわかりました．

ところで，世の中には思わぬ分野で物理や数学の研究手法が使われており，その斬新さや考え方に大変驚くことがあります．広い意味で言えば，様々な学問どうしが相互に関連し合っているとも言えそうです．

日頃，いろいろなことに目を配り，勉強・研究しておく必要があることを痛感します．　(R)

＊　　＊

今回の特集では物理にはどういった分野があり，どのように拡がり他の分野とつながっているのかを解説していただきました．各分野は独立しておらず，関連しあって拡がっていることがわかります．

この特集は「物理の世界」の地図に近いのではないかと思います．時々，地図本をぱらぱらと眺めることがあるのですが，意外な発見があったり，その地を直接訪れたような気分になれたりとなかなか楽しめます．本特集も物理の世界へのしるべとなり，皆さんがより物理に興味を持つきっかけになれば幸いです．　(T)

数　理　科　学　2月号

2015年2月1日発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁